

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт физики и математики

МОЛОДЁЖНАЯ ПЕТЕРБУРГСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ИНЖЕНЕРОВ-ПЕДАГОГОВ

Сборник материалов научной конференции

22–23 апреля 2025 года



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2025

УДК 37+51+53+62

ББК 22:74

М75

Молодёжная петербургская школа-конференция инженеров-педагогов : сборник материалов научной конференции, 22–23 апреля 2025 г. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 140 с.

Сборник содержит материалы Молодёжной петербургской школы-конференции инженеров-педагогов. Основные направления работы конференции: прикладные вопросы математики и математического моделирования, физика и науки о материалах, методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе, фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов в области инженерных и педагогических знаний.

Редакционная коллегия:

*П. В. Захаров, Е. Г. Апушкинский, И. В. Сысоев, М. В. Сысоева (отв. ред.),
А. Н. Ипатов, А. В. Шатров, Н. А. Леонова, В. В. Мизина*

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета

Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-9063-6

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2025

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИЧНОСТИ ПО ОТПЕЧАТКАМ ПАЛЬЦЕВ РУК ПРИ ПОМОЩИ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

М.М. Алексеев¹, Е.Д. Денисенко¹, А.А. Куготова¹, А.С. Кулак², А.В. Козловский¹

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
✉ joinmtma@mail.ru

Введение. Идентификация личности по биометрическим параметрам приобретает всё большую актуальность в современной технологической сфере. Среди различных биометрических технологий дактилоскопия занимает особое место и применяется в смартфонах, при оформлении заграничных паспортов и в системах контроля доступа ("умные замки").

Традиционные методы идентификации по отпечаткам пальцев основаны на сравнении минуций [1], что требует хранения значительного объема данных. Применение фрактальной геометрии привлекательно тем, что она позволяет характеризовать отпечаток всего двумя числовыми характеристиками: средним значением фрактальной размерности и средним отклонением. Это снижает требования к памяти устройств и обеспечивает дополнительную безопасность, поскольку по фрактальной размерности невозможно восстановить исходный отпечаток. Однако на практике это преимущество в тоже время приводит к сложности и ошибкам идентификации личности, что мешает использовать фрактальную геометрию для этих целей.

В научной литературе, в частности в работе [2], рассматриваются теоретические аспекты данного подхода, однако сравнительного анализа результатов определения фрактальной размерности отпечатков пальцев рук различными методами не проводилось. Также не исследовалась возможность использования значений фрактальной размерности, полученных разными методами, в совокупности для более точной идентификации личности.

Таким образом, целью данной работы является проведение сравнительного анализа значений фрактальной размерности изображений отпечатков пальцев рук, полученных несколькими методами, а также учёт результатов этого анализа в алгоритме идентификации личности по отпечаткам пальцев рук при помощи фрактальной геометрии.

Материалы и методы исследования. Для проведения исследования была сформирована выборка из 51 человека - студентов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, включающая как юношей, так и девушек в возрасте от 18 до 22 лет. Отбор людей осуществлялся на добровольной основе с соблюдением этических норм и требований к конфиденциальности персональных данных. Сбор биометрического материала проводился с использованием сертифицированного биометрического сканера ZK9500 (ZKTeco, Китай), обеспечивающего высокое качество сканирования папиллярных узоров. От каждого человека было получено по 5 образцов отпечатков указательного пальца правой руки, что в совокупности составило 255 цифровых изображений размером 375×300 пикселей. Процедура сканирования выполнялась в стандартизированных условиях для минимизации влияния внешних факторов на качество получаемых отпечатков. Все изображения сохранялись в черно-белом формате с разрешением 500 dpi, обеспечивающим детальное отображение папиллярных линий и их особенностей.

Полученный массив данных был подвергнут дальнейшей программной обработке при помощи языка программирования Python. Фрактальная размерность поверхности определялась 3 методами: подсчёт квадратов, подсчёт кубов, метод триангуляции.

Алгоритм определения фрактальной размерности был следующий: каждое изображение покрывалось последовательностью сеток (квадратами, кубами или пирамидами), при этом размер каждой последующей сетки был меньше предыдущей. Для каждой из сеток фиксировалось два значения: количество квадратов, кубов или пирамид, пересекаемых линией папиллярного узора; длина стороны, например, квадрата. Тогда значение фрактальной размерности поверхности D_f определяется следующим образом [3]:

$$D_f = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (1)$$

где ε – характерный размер области пространства, $N(\varepsilon)$ – количество областей пространства, которые содержат линии папиллярного узора.

Перед использованием метода подсчёта квадратов применялась бинаризация изображения с адаптивным порогом при помощи библиотеки OpenCV. Перед использованием программы для расчета фрактальной размерности изображений отпечатков пальцев рук, разработанная нами программа была апробирована на изображениях с известной фрактальной размерностью, таких как: береговая линия Ирландии, снежинка Коха и треугольник Серпинского.

Полученные значения D_f усреднялись для каждого человека, а также определялась дисперсия. Для сравнительного анализа использовались гистограммы и диаграммы разброса.

Результаты и их обсуждение. Пример реализации метода подсчёта квадратов бинаризованного изображения показан на рис. 1.

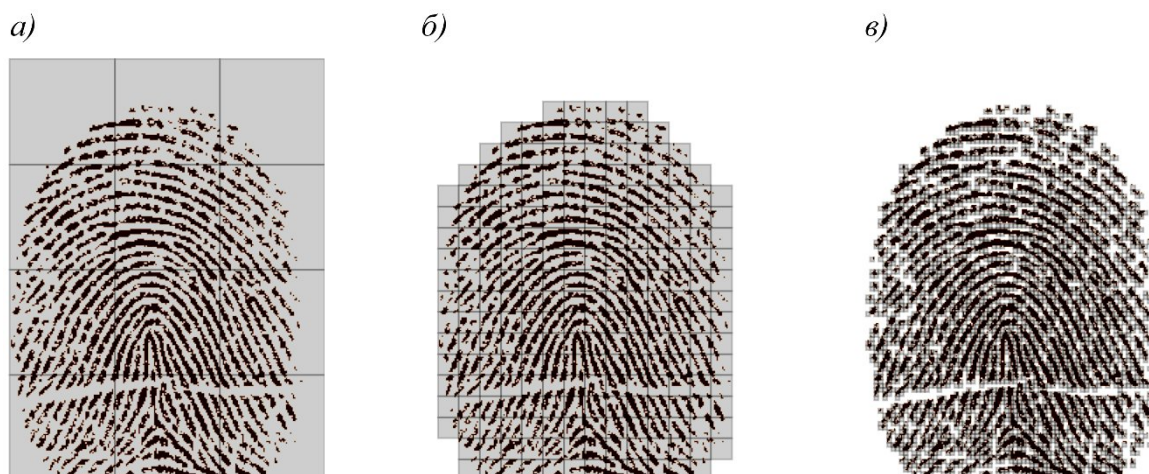


Рис. 1. Пример реализации метода подсчета квадратов для определения фрактальной размерности: а) сторона квадрата 75 пикселей; б) сторона квадрата 15 пикселей; в) сторона квадрата 5 пикселей

Минимальное значение D_f составляло 1,5003, максимальное – 1,8894. Среднее значение по всем изображениям – 1,6886. Необходимо отметить, что доверительные интервалы у разных людей часто пересекаются.

На рис. 2 показан пример определения фрактальной размерности методом кубов и триангуляции. Поскольку для этих методов не проводилось бинаризации изображений, то значения D_f изменялись от 2 до 3. Значения D_f для одно и того же изображения, определённые разными методами, отличаются. Это вызвано систематическими ошибками различных методов определения фрактальной размерности.

На диаграммах разброса при сравнении трех методов наблюдается средняя корреляция, что позволяет более точно проводить идентификацию личности по отпечаткам пальцев рук при использовании совокупности значений от трёх методов.

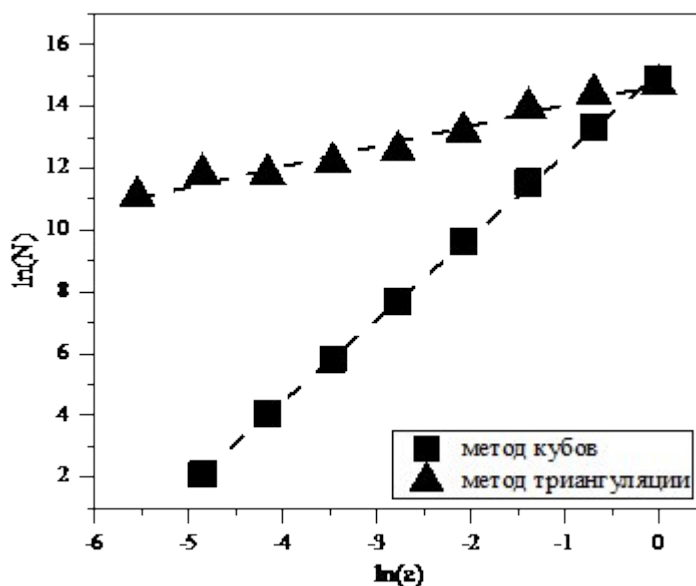


Рис. 2. Пример определения фрактальной размерности методом кубов и триангуляции

Закключение. В данной работе было получено 255 изображений отпечатков указательных пальцев правой руки от 51 человека. Тремя методами были определены фрактальные размерности полученных изображений папиллярного узора. Показано, что значения D_f , определенные разными методами для одного и того же изображения, отличаются. При этом между ними наблюдается средняя корреляция, что позволяет дополнить существующую методику идентификации с помощью фрактальной геометрии хранением и сравнением не одной, а нескольких значений D_f , полученных разными методами, что повышает качество идентификации личности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляков А.В., Ковалев И.М., Алгоритм сравнения отпечатков пальцев на основе поиска максимального пути в графе // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – 2016. - Т. 20. – вып. 2. – С. 103–120.
2. Трифонов Д.И., Идентификация личности по фрактальной размерности отпечатков пальцев и системы контроля и управления доступом // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2010. – № 1-1 (21). – С. 113-117.
3. Еровенко, В.А. Концепция фрактала Мандельброта с математической и философской точек зрения // Математические структуры и моделирование. – 2015. – № 4. – С. 29–39.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П.Е. Бакаев, Н.А. Матвеев, П.А. Поляков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ pavelbakaev2006@gmail.com

Введение. Краевые задачи, возникающие в физике, часто требуют тонкого баланса между точностью и вычислительной эффективностью. Традиционные методы, такие как конечные разности или спектральные подходы, не всегда способны адекватно отразить асимптотическое поведение решений на противоположных границах области. Здесь на первый план выходят двухточечные аппроксимации Паде — рациональные приближения, конструируемые с учетом информации о функции в двух точках, часто соответствующих граничным условиям задачи. Их ключевое преимущество заключается в способности одновременно воспроизводить локальные особенности и глобальную асимптотику, что критически важно для задач, где полиномиальные аппроксимации терпят неудачу из-за колебаний или расходимости на бесконечности [1]. В гидродинамике они эффективно моделируют пограничные слои [3, 4]. Этот метод, в отличие от классических рядов Тейлора, не требует бесконечного числа членов для сходимости, обеспечивая компактные и устойчивые выражения

Двухточечные аппроксимации Паде. В отличие от одноточечной аппроксимации Паде, двухточечная модификация заключается в том, что при построении дробно-рациональных приближений учитывается два асимптотических разложения: в окрестности точек 0 и ∞ .

$$F(x) \approx 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, x \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$F(x) \approx \frac{1}{x^P} \left(1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots \right), x \rightarrow 0; 0 \leq F(x) = O(1), \forall x \in [0, \infty], P \in \mathbb{N}_0 \quad (2)$$

При этом (1) называют внутренней асимптотикой, (2) называют внешней асимптотикой. Степень N полинома числителя рациональной дроби для (2) и (3) должна быть на P единиц меньше полинома знаменателя. Примем обозначения вида:

$$\frac{P_N(x)}{Q_{N+P}(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_N x^N}{1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_{N+P} x^{N+P}} = [N/N + P]_{l,m}(x) \quad (3)$$

$$(F - [N/N + P]_{l,m}) \sim \alpha_l x^l, x \rightarrow 0; (F - [N/N + P]_{l,m}) \sim \beta_m x^{-(m+P)}, x \rightarrow \infty$$

Где $N = 0, 1, 2, \dots$; l — число членов разложения (1), m — число членов разложения (2), учтенных в (3); $l, m = 1, 2, \dots$. Коэффициенты p_i и q_i могут быть найдены различными способами, но обычный для АП способ — умножением разложений (1) и (2) на знаменатель дроби (3) $Q_{N+P}(x)$. В результате получается система линейных уравнений относительно коэффициентов АП. Величина $l + m$ — количество уравнений для получения дроби (3); величина $2N + P + 1$ — количество неизвестных коэффициентов p_i и q_i в (3). Эти величина должны удовлетворять равенству:

$$l + m = 2N + P + 1 \quad (4)$$

Как пример использования двухточечных аппроксимаций Паде, рассмотрим краевую задачу для уравнения Эйри [4]:

$$y'' - \sigma^2 x y = g(x) y, y(0) = 0, y(\infty) = 0, \sigma \gg 1 \quad (5)$$

Асимптотическое решение имеет вид:

$$y(x) = U(\xi) \left[1 + O(\sigma^{-1}) \right], \xi = x\sigma^{2/3}$$

Где функция Эйри $U(\xi)$ определена уравнением:

$$U'' - \varepsilon U = 0, U(0) = 1, U(\infty) = 0 \quad (6)$$

Переходный слой определяется областью $x = \mu\sigma^{2/3}$, где μ - некоторая постоянная. Область внутренней асимптотики - это $x \in [0, x_-(\sigma)]$, $x_- = o(\sigma^{-2/3})$, а область внешней асимптотики $x \in [x_+(\sigma), \infty)$, $\sigma^{-2/3} = j(x_+)$. Внутренняя и внешняя асимптотики функции Эйри соответственно определены как U_a^i и U_a^e :

$$U_a^i = 1 - a\xi + \frac{1}{6}\xi^3 + O(\xi^4), \xi \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$U_a^e = b\xi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \left[1 - \frac{5}{48}\xi^{-3/2} + O(\xi^{-3}) \right], \xi \rightarrow \infty \quad (8)$$

Аппроксимация Паде функции Эйри имеет вид:

$$U_a = \frac{1 - ax + \frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{2}{3}ax^{5/2} + \frac{32}{5}ax^4}{1 + \frac{32}{5}\frac{a}{b}x^{17/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (9)$$

Аппроксимация функции Эйри (9) включает три члена асимптотик (7) и (8) на обоих концах области и обеспечивает достаточную точность внутри переходного слоя. Особенность этой краевой задачи учитывается в виде умножения рациональной дроби на сглаживающую функцию:

$$\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Благодаря ей, мы можем сгладить асимптотику до полного совпадения на граничных точках области. Этот подход позволяет улучшить согласование асимптотических решений и обеспечить гладкое поведение решения на всей области. Параметры a , b получены из интегральных соотношений

$$\int_0^\infty sUds = a$$

(10-11)

$$\int_0^\infty ss^2Uds = 1$$

Соотношения (10), (11) можно получить, умножая (6) последовательно на 1, s , s^2 , и интегрируя затем от 0 до ∞ . Подставив в (10) и (11) вместо U интерполяцию U_a , вычислим $a = 0,7287$, $b = 0,7922$. Точные значения параметров АП $a = 3^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \approx 0,7287$, $b = 0,7922$. [4]. На

рис. 1 приведены графики асимптотик и Паде аппроксиманты решения уравнения Эйри.

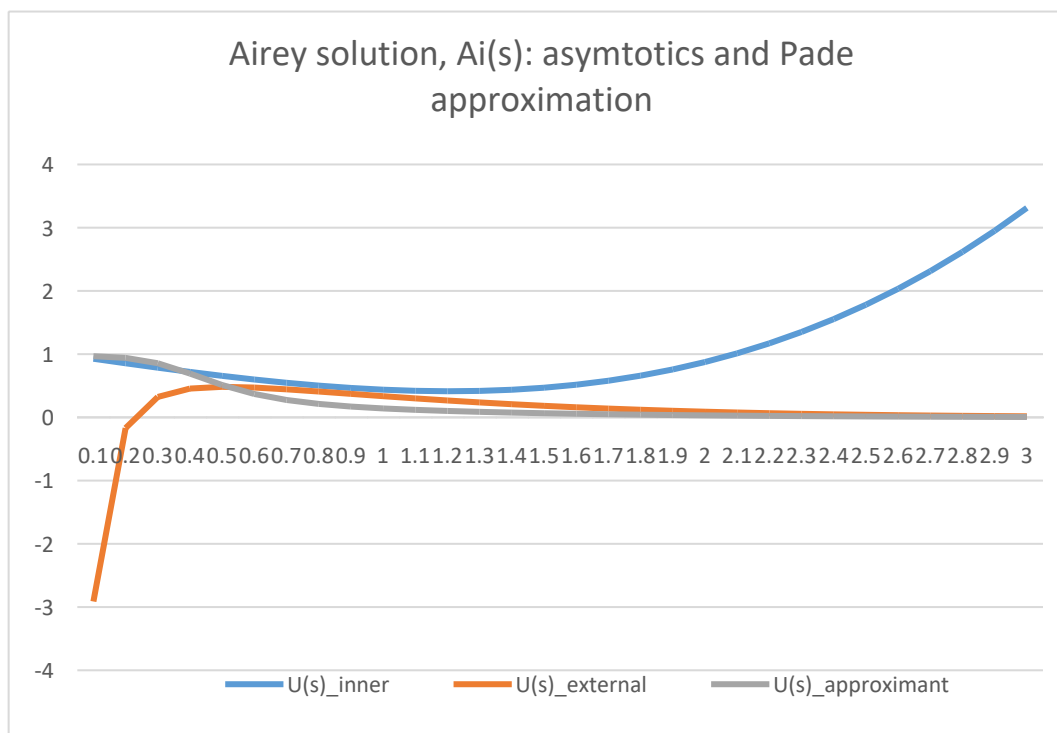


Рис. 1. Графики асимптотик U_a^i , U_a^e и Паде аппроксиманты U_a

Из приведенного примера следует, что особенностью метода соединения асимптотик является неоднозначность алгоритма, свобода выбора как форма Паде-аппроксимант, интегральных соотношений, так и способов вычисления параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксиманты Паде. - М.: Мир, 1986 — 496с.
2. Andrianov I., Shatrov A. Padé Approximants, Their Properties, and Applications to Hydrodynamic Problems // Symmetry. Vol.13. — № 10. — P. 1869. <https://doi.org/10.3390/sym13101869>
3. Shatrov A.V. A method of matching of interior and exterior asymptotics in boundary-value problems of mathematical physics // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 230. № 5. — P. 804–807 doi.org/10.1007/s10958-018-3794
4. Баранцев Р.Г., Энгельгарт В.Н. Асимптотические методы в механике газа и жидкости: Учебное пособие. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. —88 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИОРИТЕТНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ВЫТАЛКИВАЮЩИМ МЕХАНИЗМОМ И ОДНОКРАТНОЙ ПРОФИЛАКТИКОЙ КАНАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.Е. Бакшеев, О.И. Заяц

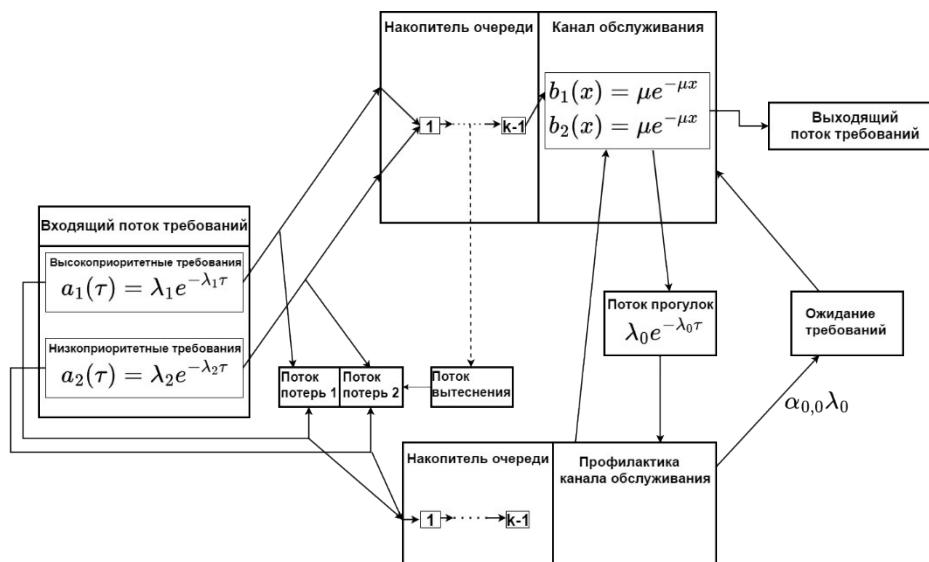
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ yaming2110@gmail.com

В настоящее время теория массового обслуживания (ТМО) располагает значительным количеством разнообразных моделей систем массового обслуживания (СМО). Приоритетные СМО, снабженные выталкивающим механизмом, являются примером достаточно изученных систем [1]. Модификации СМО, включающие контролируемые перерывы в работе, изучены гораздо меньше, и именно им посвящен настоящий доклад. Термин "профилактика" будет использоваться авторами вместо англоязычного аналога "vacation", принятого в зарубежной литературе.

Практические задачи, на основе которых строилась изучаемая СМО, предполагают, что системе не требуются многократные профилактики без перерыва на работу. За оптимальный момент для начала профилактики принимается момент освобождения системы от всех требований. Целью данной статьи стало сравнение описанной модели с известной моделью [2,3], а также с моделью многократных профилактик.

Исследуемая система обладает следующими характеристиками: два входящих потока, один канал обслуживания, емкость k , абсолютный приоритет, детерминированный выталкивающий механизм. В нотации Д. Кендалла [4], Г.П. Башарина [5] и Б.Доши [6] данная система имеет обозначение $\overline{M}_2/M/1/k/f_2^2/V_S$ (два входящих потока, один канал обслуживания, емкость k , абсолютный приоритет, детерминированный выталкивающий механизм). Если за время проведения профилактики новых требований не поступило, то система переходит в состояние ожидания и начинает обычную работу с приходом любого требования. Схема изучаемой СМО представлена на рис.1.

Рис. 1. Схема СМО класса $\overline{M}_2/M/1/k/f_2^2/V_S$

Финальные вероятности состояний системы, являющиеся её ключевыми характеристиками, были получены методом производящих функций [7]. Применение этого метода позволило вычислить важнейшие показатели эффективности работы СМО:

вероятности потери требований обоих типов, вероятность осуществления профилактики, вероятность ожидания. Для вероятностей ожидания и профилактики были получены точные аналитические выражения.

Во всех последующих численных экспериментах емкость СМО $k = 31$, для первого эксперимента параметр интенсивности проведения профилактики $\rho_0 = 1$, для второго - $\rho_0 = 0.01$.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют два параметра системы: вероятность профилактики и вероятность потери высокоприоритетных требований. На рисунке 2 представлены графики зависимости этих параметров от загрузки системы в различных режимах профилактики: однократном (V_S), многократном (V_M) или при ее отсутствии (V_0).

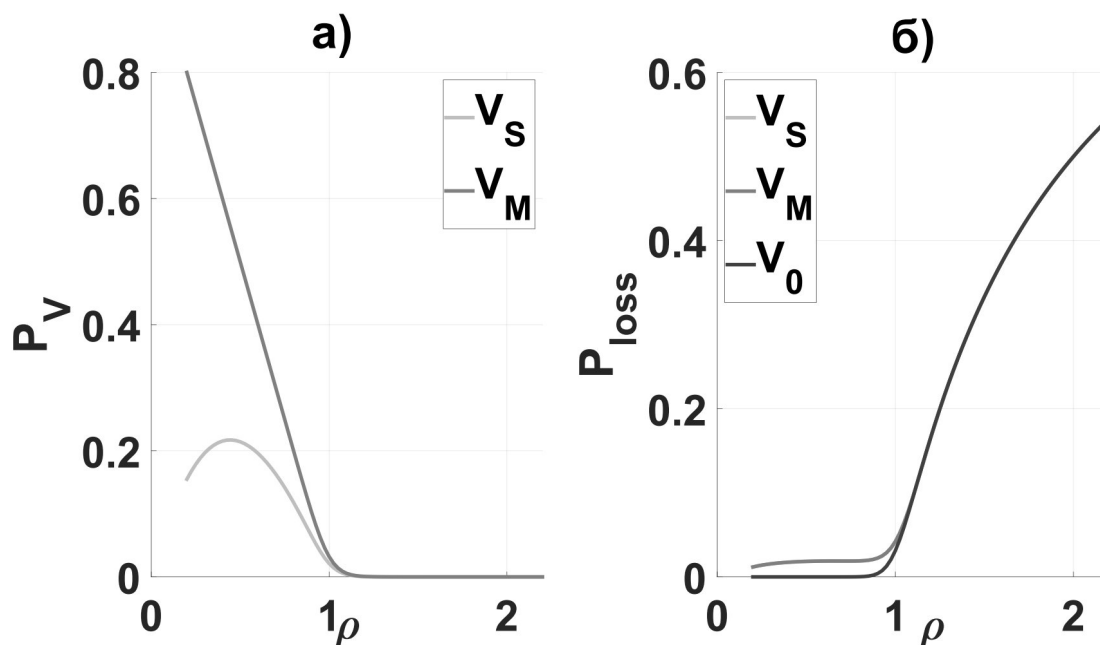


Рис. 2. а) Зависимость вероятности профилактики от общей загрузки системы ρ ; б) Зависимость вероятности потери требований от ρ

Из анализа графиков становится ясно, что время проведения однократной профилактики гораздо меньше, чем многократной. Однако более детальное исследование показывает, что этот временной выигрыш компенсируется более продолжительными периодами ожидания новых требований, что в итоге приводит к почти равной пропускной способности обеих систем. Следует подчеркнуть, что данное наблюдение не позволяет однозначно утверждать о преимуществах модели с многократными профилактиками, поскольку реакция оборудования на частые переключения может варьироваться в зависимости от технических характеристик устройств. С увеличением загрузки системы время проведения профилактики асимптотически стремятся к нулю.

Вероятность потери требований также представляет собой критически важный показатель эффективности СМО. При высокой загрузке системы наличие профилактики практически не влияет на вероятность потерь требований. В случае малой загрузки вероятность потерь требований для однократной и многократной профилактики совпадают и оказываются выше, чем при отсутствии профилактики. Следует отметить, что выявленное увеличение носит незначительный характер (порядка 0.02) и было зафиксировано при минимальной интенсивности проведения профилактики ($\rho_0 = 0.01$). Это незначительное

возрастание вероятности потерь можно интерпретировать как допустимую плату за возможность проведения профилактических работ и увеличение общего времени безотказной работы физической системы.

Рассмотренная в данном исследовании модель СМО обладает значительной практической ценностью, а её детальное изучение представляет собой актуальную научно-прикладную задачу. Однократные профилактики являются весьма употребительными и представляют содержательную альтернативу для многократных профилактик. Успешное применение метода производящих функций подтвердило его эффективность для задач с этой модификацией СМО. Полученные результаты достаточно наглядны для их последующего использования в проектировании и оптимизации различных телематических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.
2. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 // Программная инженерия.— 2012. — № 2. — С. 22—27.
3. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 2 // Программная инженерия.— 2012. — № 3. — С. 21—29.
4. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. — 1959. — Т. 3, № 6. — С. 97—111.
5. Башарин Г. П. Некоторые результаты для системы с приоритетом // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.: Наука. — 1969. — С. 39—53.
6. Doshi B. Queueing systems with vacations - a survey // Queueing systems. — 1986. — Vol. 1, no. 1. — P. 29—66.
7. Ильяшенко А. С. Модели и метод исследования приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом. Кандидатская диссертация. — СПб: СПбГПУ, 2015. — 150 с.

ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ВЕЩЕСТВА

В.А. Гневашева, М.Р. Бортковская

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ gnevasheva.va@edu.spbstu.ru

Аннотация. Работа посвящена производным и интегралам дробных порядков. На основе обзора литературы по теме доклада сформулированы основные правила вычисления дифференциала Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова, выбран метод создания практически применимой математической модели вязкоупругого материала.

Данный метод применён авторами к решению прикладной задачи по разработке математической модели вязкоупругого грунта. Проведена численная реализация модели вязкоупругого грунта с использованием дробных производных и без них на языке JavaScript с визуализацией с помощью HTML. Показано, что первая модель обеспечивает более точное описание вязкоупругого поведения грунта по сравнению с классической моделью, основанной на абсолютно упругом соударении.

Ключевые слова: дробная производная, математическая модель, вязкоупругий грунт, дискретные частицы, модель Максвелла.

Введение. Актуальность работы обусловлена необходимостью более точного, по сравнению с классическими моделями, описания процессов, происходящих с вязкоупругими материалами, потому что, согласно рассмотренной в [7] теории Больцмана об упругом последствии, эти процессы должны описываться с учетом эффекта "памяти" о прошлой деформации.

На данный момент тема дробных производных наиболее подробно раскрыта в подробной фундаментальной монографии [3], теоретические материалы были взяты из этого источника. Также очень полезным с подробными и простыми объяснениями оказалось пособие [4]. В нем раскрываются некоторые приложения дробных дифференциальных уравнений, что и стало поводом к возникновению идеи о рассмотрении их практического применения. В настоящее время дробные производные применяются в моделировании разнообразных процессов при решении прикладных задач механики и физики (например, [1], [2], [5]). Научная новизна нашего исследования заключается в развитии идеи о применении дробного дифференцирования в реальных практических задачах по исследованию грунтов и их свойств вязкости и упругости.

Теоретическая часть. Основными условиями, при одновременном выполнении которых можно взять производную дробного порядка α , являются:

непрерывность – функция должна быть непрерывной на интервале, где планируется взять производную;

наличие непрерывных производных до некоторого порядка – если требуется взять дробную производную порядка α (где $0 < \alpha < 1$), то функция должна иметь непрерывную первую производную;

локальная интегрируемость – функция должна быть локально интегрируема на рассматриваемом интервале (a, b) : интеграл модуля функции $f(x)$ по интервалу (a, b) абсолютно сходится (то есть конечен): $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$.

Этим условиям удовлетворяют, например, следующие функции: полиномиальные ($f(x)=x^n$), экспоненциальные ($f(x)=e^{ax}$), тригонометрические ($f(x)=\sin(x)$), логарифмические ($f(x)=\ln(x)$ при $x>0$).

Определения.

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

Определение левостороннего и правостороннего дробного интеграла Римана-Лиувилля для $\alpha > 0$:

$$(I_a^\alpha + \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a; (I_b^\alpha - \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, x < b$$

Определение левосторонней и правосторонней дробной производной Римана-Лиувилля $0 < \alpha < 1$:

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt; \quad (D_{b-}^\alpha f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt,$$

где Γ – гамма-функция: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.

Определение производной Грюнвальда-Летникова: $D_h^\alpha f(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^\infty \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kh)$, где h – шаг дискретизации, определяющий точность аппроксимации дробной производной.

Формулировки достаточных условий существования дробной производной и определений, приведенных выше, имеются в книге [3], где содержатся обоснования введенных определений и доказательства утверждений о дробных производных.

Пример вычисления. Вычисление дробной производной порядка $\alpha = 0.5$ от функции $f(x) = x$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt \right), n = [\alpha] + 1.$$

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (x-t)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} t dt \right)$$

$$\left(\int_0^x (x-t)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} t dt \right) = \left[\begin{matrix} u = x-t & t = x-u \\ x = const & dt = -du \end{matrix} \right] = \int_x^0 u^{-\frac{1}{2}} (x-u) (-du) =$$

$$\int_0^x u^{-\frac{1}{2}} (x-u) du = \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} x du - \int_0^x u^{\frac{1}{2}} du = (x2\sqrt{u})|_0^x - \left(\frac{2u\sqrt{u}}{3} \right) \Big|_0^x = 2x(\sqrt{x} - 0) -$$

$$\frac{2}{3} (x\sqrt{x} - 0) = \frac{4}{3} x\sqrt{x}.$$

$$\left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

=>

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}.$$

Методы исследования. Для программной реализации математической модели выбран язык программирования JavaScript из-за простоты расчетов, а также из-за удобной связи с CSS и HTML для качественной визуализации поведения грунта. В основе написания кода – применение объектно-ориентированного программирования и использование методов моделирования движения частиц.

Вязкоупругие материалы сочетают в себе свойства вязкости и упругости. Вязкоупругий грунт представлен как множество дискретных частиц, взаимодействующих между собой. на основе идеи о зависимости деформации тела от сил, действующих на тело, описываемой в модели британского физика и механика Д. К. Максвелла, описанной и примененной в работе [6]. Предложенный подход позволяет учесть зависимость скорости частиц модели от количества ударов о другие частицы в прошлом. Они могут деформироваться под нагрузкой, не сразу возвращаясь в исходное состояние. В [6] рассматривается основное уравнение модели Максвелла с использованием дробных производных в терминах Римана-Лиувилля: $\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_\infty \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \varepsilon$ (E_∞ – мгновенный модуль упругости, τ_ε^γ – время релаксации, показывающее, как быстро материал возвращается в равновесное состояние после деформации, σ и ε –

напряжение и деформация), в этой работе рассмотрена задача о деформировании тонкого стержня с приведенной диаграммой деформирования при разных значениях порядка дробной производной. В настоящей работе идея Д.К. Максвелла применяется для создания модели грунта, обладающему вязкоупругими свойствами.

Созданная математическая модель основана на упрощенном представлении идеи дробного дифференцирования, примененного к дискретным частям грунта (отдельным частицам со значением массы, принятым за 1. $V_{y \text{ новая}} = V_{y \text{ старая}} + F_{\varepsilon} * S^{\alpha}$ ($V_{y \text{ новая}}$ - обновленная скорость частицы по оси y , $V_{y \text{ старая}}$ – скорость в предыдущий момент времени, F_{ε} – сила, пропорциональная глубине перекрытия частичек, S - глубина проникновения частиц друг в друга в предыдущие моменты времени, α - порядок реализуемой дробной производной). Суть метода упрощения видна на приведенном выше примере вычисления дробной производной порядка 0.5 от функции $f(x) = x$, где в результате замен порядок дробной производной учитывается в показателе степени ($u^{\frac{1}{2}}$). Этот подход позволяет наглядно, без использования сложных алгоритмов реализации взятия дробной производной по определению (например, с биномиальными коэффициентами или интегрированием), отобразить ее смысл для вязкоупругих грунтов – наличие зависимости поведения и скорости движения частиц от их предыдущих взаимодействий друг с другом.

В работе проведен анализ влияния изменения порядка дробной производной на отражаемые моделью свойства материала. Установлено, что варьирование этого параметра позволяет регулировать баланс между упругими и вязкими свойствами.

Для программной реализации математической модели выбран язык программирования JavaScript из-за простоты расчетов, а также из-за удобной связи с CSS и HTML для качественной визуализации поведения грунта. В основе написания кода – применение объектно-ориентированного программирования и использование методов моделирования движения частиц. Проведена численная реализация модели вязкоупругого грунта с использованием дробных производных и без них (упрощенный вариант) на языке JavaScript с визуализацией с помощью HTML.

Результаты и выводы. Получены модели, представленные на html странице:

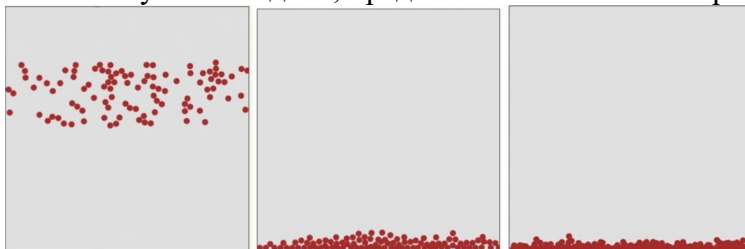


Рис. 1. Начальный момент запуска частиц и состояние сразу после падения для двух моделей

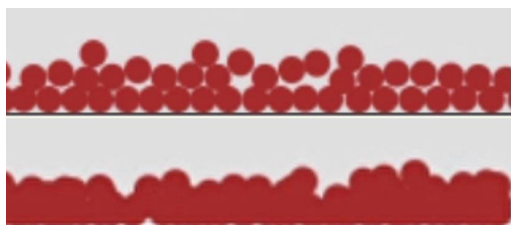


Рис. 2. Разница в состоянии частиц спустя ~ 2 минуты после удара о «землю»

Первая модель выполнена без использования дробных производных (классическая модель: частицы взаимодействуют на основе абсолютно упругого соударения), несложно заметить, что частицы соударяются резко и не очень наглядно отражают оседание под действием силы тяжести реальных грунтов.

Вторая модель с применением дробной производной делает поведение частиц в модели более «мягким», демонстрирует, пусть и упрощенно, деформацию частиц. Возведение S в степень α позволяет учитывать чувствительность дальнейшего взаимодействия в зависимости от глубины перекрытия в прошлом, эта идея была рассмотрена в [7]:

$\alpha = 0$, сила удара постоянна, не зависит от S ;

$\alpha = 1$, сила линейно зависит S ;

$\alpha \in (0;1)$ – показатель S^α означает, что сила будет расти медленнее, чем значение S .

Идеи дальнейшего развития метода. Аппарат взятия дробных производных функций, вероятно, может быть применен для моделирования тканей человеческого организма в прогнозировании и лечении заболеваний, для изучения полиэтиленов с целью производства более качественных изделий и, следовательно, более долговечного срока службы пластиковых упаковок, то есть в задачах, где мы имеем дело с вязкоупругими средами и взаимодействием вязкоупругих объектов. С использованием более сложных численных методов можно улучшить представленную в статье модель и применить ее в практических областях, для которых необходимо качественное изучение грунтов, например, в проектировании строительных объектов и бурения скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горская Т.Ю., Галимянов А.Ф. Метод подобластей для уравнений с дробно-дифференциальным оператором // Международный научно-исследовательский журнал. — 2022. — №11 (125). [Электронный ресурс]. — URL: <https://research-journal.org/archive/11-125-2022-november/10.23670/IRJ.2022.125.2> (дата обращения: 27.03.2025).
2. Мороз Л.И., Масловская А.Г. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнетоэлектриков. — М.: Наука, 2022. — 159 с. — ISBN 978-5-02-040959-0.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
4. Ляхов Л.Н., Шишкина Э.Л. Дробные производные и интегралы и их приложения: учебно-методич. пособие для вузов. — Воронеж: ВГУ, 2011. — 102 с.
5. Боброва И.А., Бугримов А.Л., Кузнецов В.С. О применимости дробных производных в физических моделях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. — 2017. — № 3. — С. 12–22.
6. Гилемзянов А.Ф. Приближенные методы решения дробных интегродифференциальных уравнений в механике: магистерская работа. [Электронный ресурс]. — Казань, 2014. — 47 с. — Режим доступа: <https://kpfu.ru/portal/docs/F198276153/Gilemzyanov.pdf> (Дата обращения: 31.03.2025).
7. Круссер А. И., Шитикова М. В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. —2022. — Т.26. — №4.

РАСЧЁТ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ ОПТОКАРДИОГРАФИИ

Д.Р. Грачев^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

✉ Grachevrl@gmail.com

Актуальность работы непосредственно связана с всё более заметным антропогенным воздействием на окружающую среду. В частности, вопросом загрязнения источников пресной воды.

Ранее выявлено наличие реакции у пресноводных моллюсков на присутствие в воде вредных химических соединений [1]. Для контроля качества водных ресурсов все чаще предлагается использование биомониторинга на основе наблюдений за этими реакциями [2-3]. В роли математической характеристики для мониторинга качества и загрязнённости воды может выступать фрактальная размерность данных оптокардиографии пресноводных моллюсков, пропускающих через себя образцы воды в ходе фильтрации и реагирующих на их загрязнённость.

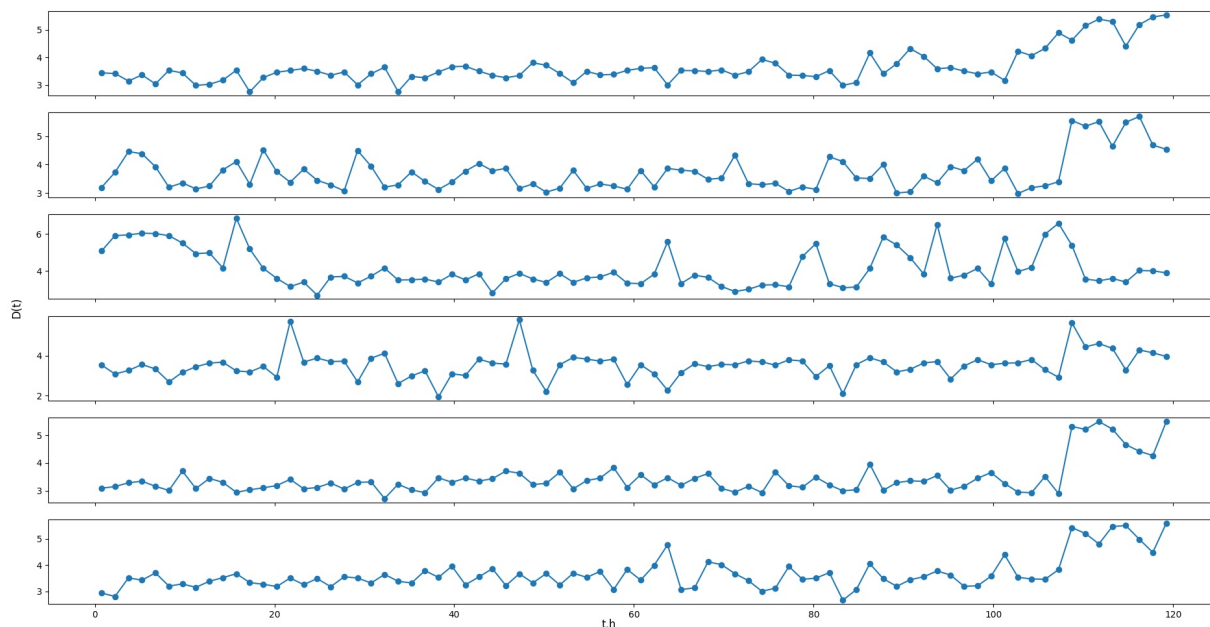


Рис. 1. Фрактальная размерность сигналов фотокардиограммы 6-ти особей пресноводных моллюсков

Целью настоящей работы является проверка возможности определения состояния жизнедеятельности моллюсков по фрактальной размерности сигналов их сердцебиения. Данная работа заключается в расчёте фрактальной размерности сигналов, снятых с сердец моллюсков с помощью метода оптокардиографии. Предполагается существование связи между состоянием жизнедеятельности моллюсков и различными метриками, применимыми к анализу полученных от моллюсков сигналов. В случае обнаружения чётких закономерностей, представляется возможным различить состояния покоя и стресса и однозначно сопоставить их с различными паттернами в результатах обработки сигналов выбранной метрикой.

Результаты вычислений представляют собой графики изменения фрактальной размерности сигналов с определенным шагом по времени (рис. 1.). Для их интерпретации необходимо выявление закономерностей между сигналами разных особей и сопоставление участков с закономерностями с состоянием моллюсков в этот момент времени.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-12-00176.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайский П.В., Трусевич В.В., Забурдаев В.И. Автоматический биоэлектронный комплекс, предназначенный для раннего обнаружения отравляющих загрязнений пресных и морских вод // Морской гидрофизический журнал. 2014. № 2. С. 44-53.
2. Петросян В.С., Храменков С.В., Аверочкина И.А., Барон В.Д., Волков С.В., Козлов М.Н., Ольшанский В.М., Скородумов С.В., Филенко О.Ф. Непрерывный мониторинг качества пресных вод методом оптической кардиографии моллюсков // «Биотехнология: экология крупных городов», РХТУ, М., 2010, С.46-48.
3. Кузнецова Т. В., Тарасевич А. В., Куракин А. С., Холодкевич С. В., Иванов А. В. Исследования физиологических адаптаций двустворчатых моллюсков на основе их кардиоактивности и двигательных реакций // Современные проблемы физиологии Т.1.С. 93-101.

АНАЛИЗ СВЯЗАННОСТИ РАЗНЫХ ПОЛУШАРИЙ МОЗГА У КРЫС-МОДЕЛЕЙ
ЭПИЛЕПСИИ

А.А. Грищенко¹, А.С. Джафарова¹, Е.М. Сулейманова², М.В. Корнилов¹

¹Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

²Институт Высшей Нервной Деятельности и Нейрофизиологии РАН, Москва

✉ vili_von@mail.ru

Диагностика эпилептической активности обычно основана на визуальном и/или автоматическом анализе электромагнитных сигналов мозга. Считается, что при эпилепсии патологическая активность одинаковая в обоих полушариях, однако на животных-моделях это не было протестировано должным образом. Недавно мы обнаружили, что в пентилентетразоловой крысиной модели пик-волновых разрядов у половины испытуемых значительная часть приступов развивается в коре только в одном или обоих полушариях [1]: у некоторых животных проявлялись симметричные пик-волновые разряды, в то время как у других проявлялись как симметричные, так и асимметричные, вплоть до случаев, когда разряды в одном полушарии отсутствовали совсем. Поскольку пик-волновые разряды обычно являются результатом патологической синхронной активности всей таламокортикальной системы, необходимо изучить, являются ли эти такие различия результатом динамики межполушарных связей, или это результат какой-то локальной нейронной динамики, предотвращающей появление разряда в одном полушарии. Чтобы ответить на этот вопрос, мы используем современные методы оценки связанности: коэффициент фазовой синхронизации [2] и функция взаимной информации [3].

Функция взаимной информации представляет собой достаточно простую нелинейную меру ненаправленной связанности, часто используемую для анализа ЭЭГ. Существуют несколько подходов к расчёту функции взаимной информации. В данной работе будет использован относительно современный подход, предложенный в работе [3], основанный на учёте ближайших соседей и предъявляющий наименьшие требования к объёму данных, что важно при исследовании нестационарных по природе физиологических сигналов. Поскольку метод имеет значительную вычислительную сложность, будет использован сортировочный алгоритм, описанный в работе [4].

Коэффициент фазовой синхронизации — очень популярная мера сходства сигналов. Сначала необходимо вычислить фазу обоих наблюдаемых сигналов (временных рядов). Для этого обычно применяется преобразование Гильберта или Гильберта-Хуанга (эмпирическое разложение мод, если по сигналу целиком установить фазу не удаётся, а фильтрация внесёт слишком большие искажения) к обоим сигналам по отдельности, возможны и другие подходы. Затем рассчитывается индекс в соответствии с работой [5].

Для проверки результатов на значимость были использованы тесты Манна-Уитни и Колмогорова-Смирнова.

Полученные результаты представлены на рисунке 1. Статистической разницы в оценках связи между разрядами, симметрично выраженными в обоих полушариях, и показателями, выраженными только в одном полушарии обнаружено не было, хотя мы использовали два разных показателя связности. Это означает, что появление пик-волновых разрядов определяется, вероятно, кортикоталамическими механизмами связи в конкретном полушарии. Этот вопрос не может быть решен в рамках данного исследования, поскольку требует одновременного измерения как таламических, так и кортикальных каналов в обоих полушариях. Поскольку у нас было только два канала, мы использовали только методы попарного анализа сигналов. Мы также должны отметить, что нет полной уверенности в том,

что результаты, полученные на пентилентетразоловых-моделях крыс, могут быть полностью экстраполированы на другие животные модели, включая генетические, а также на людей.

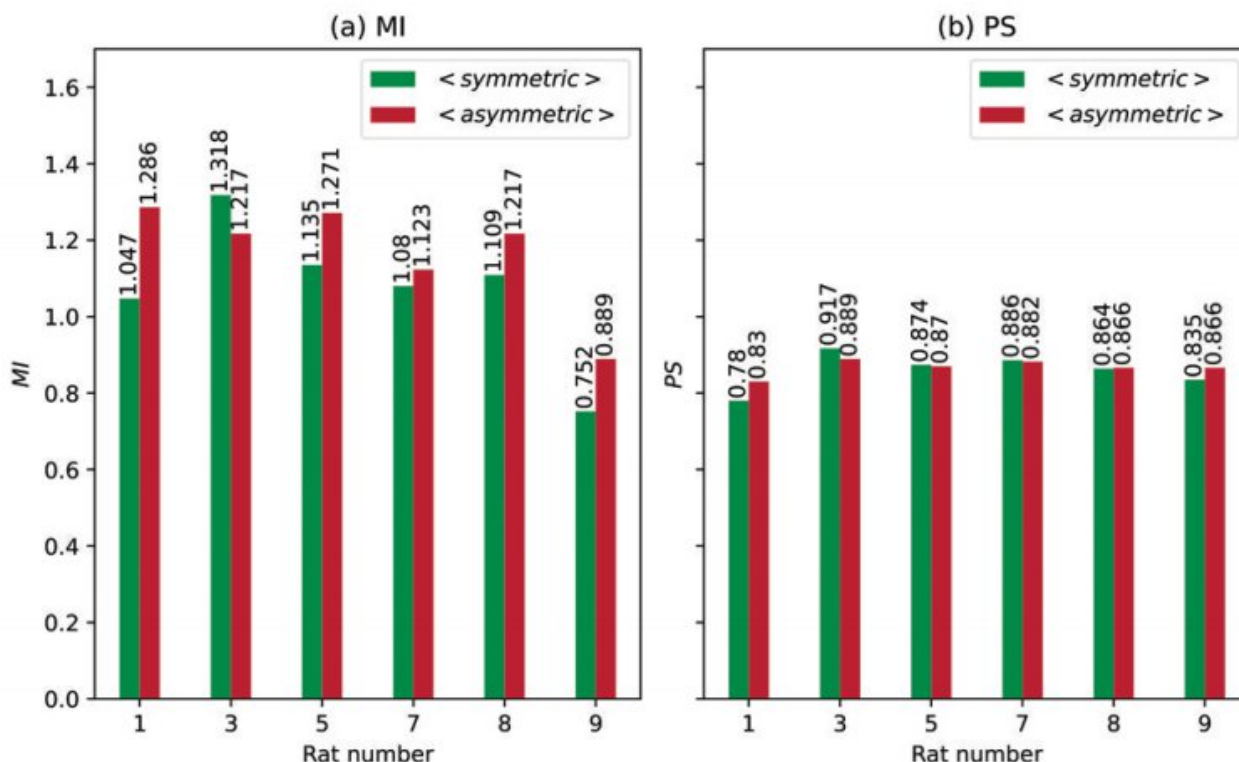


Рис. 1. Гистограмма средних значений функции взаимной информации(а) и коэффициента фазовой синхронизации (б) для симметричных (зеленых), и асимметричных (красных) разрядов

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 25-22-00406.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ershova, E. Suleymanova, A. Grishchenko, L. Vinogradova, I. Sysoev, Interhemispheric symmetry and asymmetry of absence type spike-wave discharges caused by systemic administration of pentylenetetrazole, Journal of Evolutionary Biochemistry and Physiology 59 (1) (2023) 293– 301. doi:10.1134/S0022093023010246.
2. F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C. E. Elder, Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the eeg of epilepsy patients, Physica D: Nonlinear Phenomena 144 (2000) 358–369. doi:10.1016/S0167-2789(00)00087-7.
3. A. Kraskov, H. Stögbauer, P. Grassberger, Estimating mutual information, Phys. Rev. E 69 (2004) 066138.
4. Сысоев И. В. Сравнение численных реализаций алгоритма расчёта взаимной информации на основе учёта ближайших соседей // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016;24(4):86-95.
5. Mormann F., Lehnertz K., David, P., Elder C.E. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. Physica D: Nonlinear Phenom. 2000;144:358-369.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА МЕТОДОМ НЕСУЩЕЙ

И.О. Губарь, В.М. Дорошенко, Е.Ю. Гвоздев, М.Н. Гришин
Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина
✉ igorygubar2002@bk.ru

Введение. В данном докладе рассматривается математическое моделирование полета летательного аппарата с помощью метода, используемого в моделировании радиосистем. При использовании данного метода в системах радионавигации, электрических цепях аналоговые сигналы описываются своими отсчетами, сформированными в соответствии с теоремой Котельникова. Цифровые сигналы воспроизводятся в темпе их поступления с аналого-цифрового преобразователя (АЦП) или формирования цифровыми схемами. При этом методе сигналы воспроизводятся в моделях в форме мгновенных значений напряжений, токов и т.п. параметров. Для преобразования сигналов используются дифференциальные уравнения, функциональные (спектральные, временные) преобразования[1].

Основные принципы методанесущей. Метод несущей возможно применить при описании полета летательного аппарата (ЛА). В качестве формы описания будут воспроизводиться мгновенные значения параметров пространственного положения ЛА. Движение такого аппарата можно описать с помощью системы уравнений движения, основанных на законах Ньютона:

$$m(t) = \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P} + \bar{R}_a + \bar{G}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} \quad (1)$$

где:

m – масса;

$\bar{r}$ – радиос-вектор;

$\bar{P}$ – главный вектор реактивных сил;

$\bar{R}_a$ – главный вектор аэродинамических сил;

$\bar{G}$ – вектор силы тяжести;

$\bar{V}$ – скорость материальной точки.

Также можно использовать углы Тэйта-Брайна необходимые для представления ориентации самолета и изменения его положения в пространстве. Данный способ моделирования движения ЛА помогает анализировать его положения в определенный момент времени и при заданных условиях, не используя материальной базы[2].

На первом этапе самолет рассматривается как управляемая материальная точка с массой, равной массе самолета, которая совершает движение под действием сил, приложенных ко всему самолету. Это позволяет рассчитывать траектории и изучать различные режимы полета самолета (горизонтальный полет, набор высоты, снижение, взлет, посадку, маневры и т.п.). На этом этапе определяются летнотехнические характеристики самолета: диапазоны высот и скоростей, в которых возможен безопасный полет самолета с учетом ограничения допустимых режимов полета; дальность и продолжительность полета; маневренные характеристики; взлетно-посадочные характеристики.

На втором этапе самолет рассматривается как материальное тело, движущееся под действием моментов сил, приложенных к самолету. На этом этапе определяются моменты, действующие на самолет; характеристики его устойчивости и управляемости; исследуются вопросы обеспечения устойчивости и управляемости самолета [3].

Метод несущей может применяться при исследовании любых режимов полета, но наиболее эффективен при моделировании неустановившихся режимов полета летательных аппаратов, в целях проведения испытаний на стендах завода изготовителя.

Под неустановившимся полетом понимается такой полет, при котором летательный аппарат движется с ускорением под действием неуравновешенной сил, а скорость его перемещения меняется по величине или направлению. Примером такого полета является маневрирование самолета.

Способность самолёта изменять свою скорость в полёте как по величине, так и по направлению, определяет его маневренность. В общем случае маневр самолёта является пространственным, однако достаточно полное представление о маневренных возможностях самолёта даёт анализ показателей его маневренности для двух упрощённых вариантов маневрирования – маневры только в вертикальной плоскости.

Необходимым условием выполнения криволинейного полёта в горизонтальной плоскости является наличие центростремительной силы, направленной к центру кривизны траектории полёта. Её можно создать креном самолёта, скольжением или одновременным использованием крена и скольжения. Маневр, выполняемый для изменения направления полёта (угла пути Ψ), называется разворотом [3]. Полный разворот на 360° называется виражом (рис. 1.).

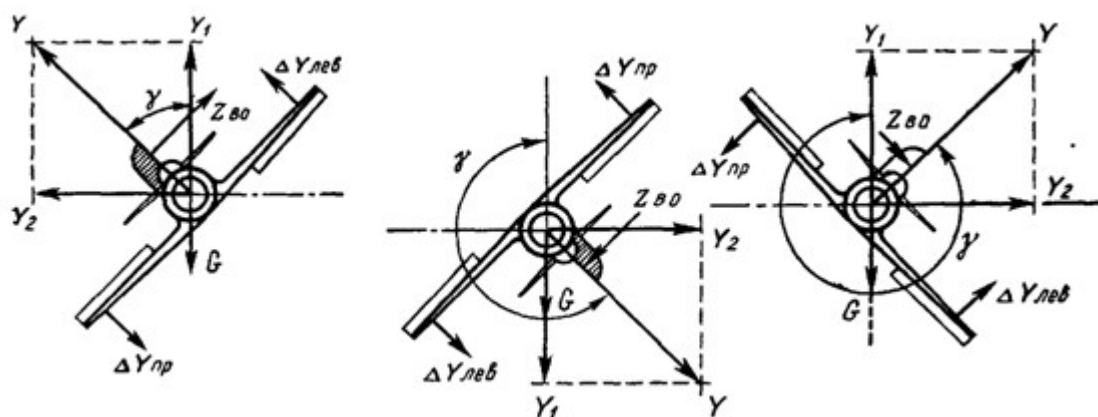


Рис. 1. Маневр «Правильный вираж»

Метод несущий позволит определить критические углы крена и скорости, при которых будет нарушения в правилах выполнения данного маневра без проведения эксперимента. Данное исследование поможет в составлении руководства по эксплуатации определенного типа воздушного судна, в том числе и беспилотных летательных аппаратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корогодин И.В., Захарова Е.В. Методы моделирования радиотехнических устройств и систем/ Лабораторный практикум. – Издательство МЭИ, 2020. – С. 79.
2. Чепурных И.В. Динамика полета самолета / Учебное пособие. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КНАГТУ», 2014. – С.112.
3. Балакин В.Л., Лазарев Ю.Н. Динамика полета самолета. Расчет траекторий и летных характеристик / Конспект лекций. – Самар, гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2002. – С.56.

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДВУХ ТИПОВ РАЗРЯДОВ У КРЫС-
МОДЕЛЕЙ ЛИМБИЧЕСКОЙ ЭПИЛЕПСИИ

А.С. Джафарова¹, А.А. Грищенко¹, Е.М. Сулейманова², М.В. Корнилов¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского

²Институт Высшей Нервной Деятельности и Нейрофизиологии РАН

✉ dzhafarova@gmail.com

Лимбическая эпилепсия, представляет собой одну из наиболее сложных форм эпилепсии, характеризующуюся генерализованными разрядами в основном в гиппокампе. Основная сложность её изучения заключается в диагностике, так как разряды могут быть как длительными, так и кратковременными, скрытыми в шуме фоновой активности, а их паттерны варьируются в зависимости от индивидуальных особенностей [1]. Традиционные методы разметки, такие как визуальный анализ электроэнцефалограммы (ЭЭГ), требуют значительных временных затрат и высокой квалификации специалистов, что делает процесс трудоёмким и субъективным. В связи с этим разработка автоматизированных методов анализа ЭЭГ является важной задачей, способной значительно ускорить и упростить диагностику.

В рамках данного исследования были использованы 72 записи ЭЭГ средней длительностью около 5 часов, полученные от 8 крыс линии Wistar. У животных спонтанные генерализованные лимбические разряды были вызваны введением пилокарпина [2]. В данной работе основное внимание было уделено анализу как длинных, так и коротких разрядов. Длинные разряды (пример приведен на рис. 1) продолжительностью более 15 секунд, характеризуются высокой амплитудой и средней частотой 7-8 Гц, с быстрым повышением частоты в начале разряда и последующим её снижением. Короткие разряды (пример приведен на рис.2) длительностью до 6 секунд, отличаются постоянной частотой на протяжении всего разряда. Выделение и классификация этих двух типов разрядов важны для понимания механизмов лимбической эпилепсии и разработки более точных методов диагностики и лечения.

Для автоматического обнаружения и классификации двух типов разрядов были выделены их ключевые характеристики. Для длинных разрядов – это продолжительная длительность, высокая амплитуда и сложная динамика изменения частоты. Для коротких разрядов — постоянная частота и малая длительность. В ходе анализа было выявлено, что короткие разряды имеют частоту, близкую к частоте длинных разрядов в начале, но без изменения частоты во времени.

Так, был разработан алгоритм обнаружения и классификации разрядов, основанный на вейвлет-преобразовании. Вейвлет-преобразование позволяет одновременно анализировать временные и частотные характеристики сигнала [3], что особенно важно для изучения сложных паттернов, таких как лимбические разряды. В качестве базового вейвлета был выбран «мексиканская шляпа» (формула 1), который хорошо подходит для выделения локальных особенностей сигнала и позволяет эффективно обнаруживать характерные изменения в ЭЭГ [4, 5].

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

где b - сдвиг по времени, a - изменение временного масштаба.

Для классификации длинных и коротких разрядов алгоритм, на основе вейвлет анализа, учитывает их длину, наличие нужной частоты и её периодичность, которая соответствует основным паттернам лимбических разрядов. Так в основу алгоритма легло выявление порогового значения для выявления низкой частоты, а также через какое время эти значения

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

повторяются, для того чтобы можно было утверждать о наличии динамики в записи и отличать её от шума.

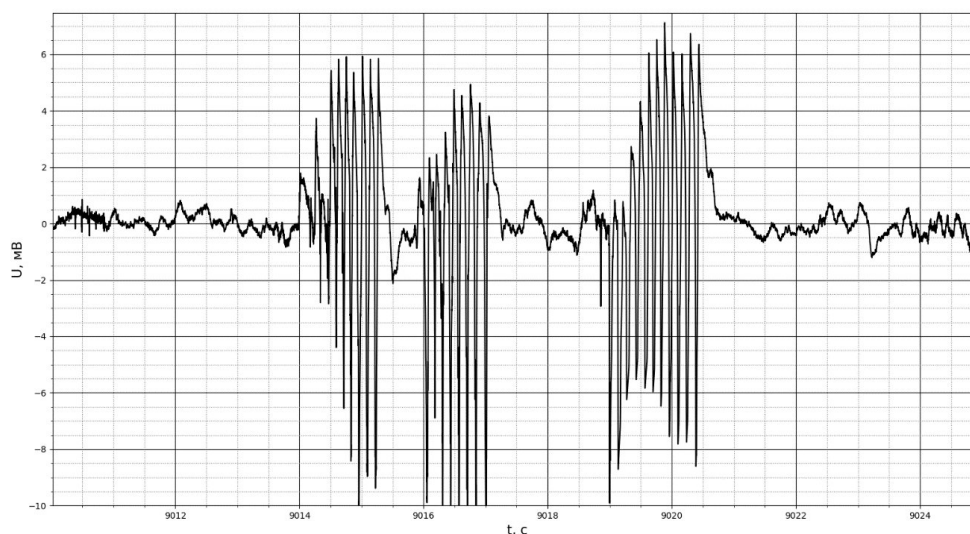


Рис. 1. Гиппокамп крысы под номером 1

Для автоматического детектирования лимбических разрядов была учтена и их длительность более 15 секунд для длинных и до 6 секунд для коротких. В ходе анализа длинных разрядов было выявлено, что в большинстве случаев начальная частота разряда превышала среднюю частоту: наблюдалось быстрое повышение частоты в начале разряда, а затем её снижение. Объединив потери длительности, амплитуды и частоты, алгоритм выявлял эпилептическую активность в записи ЭЭГ.

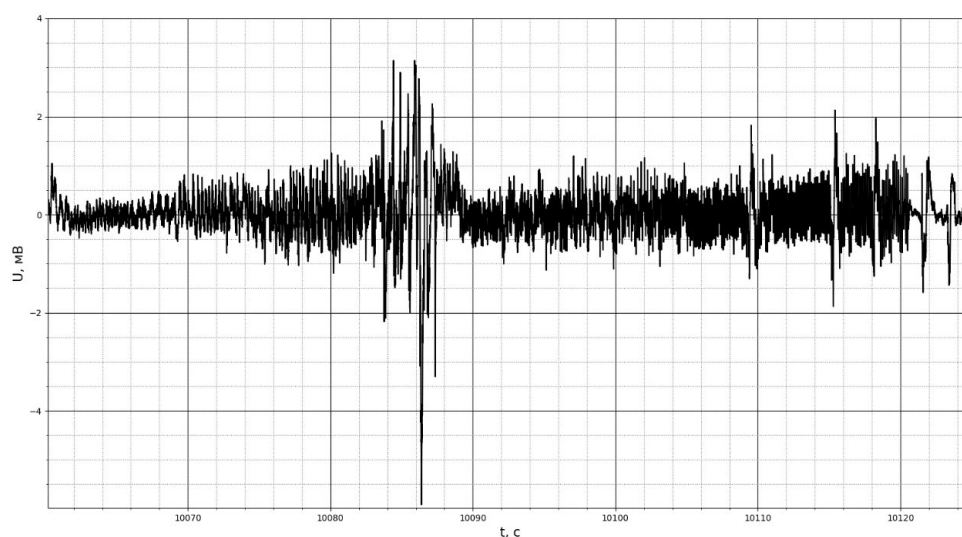


Рис. 2. Гиппокамп крысы под номером 1

Для оценки эффективности алгоритма были рассчитаны показатели специфичности и чувствительности. Специфичность отражает долю правильно обнаруженных разрядов среди всех, выделенных алгоритмом, а чувствительность показывает, насколько часто алгоритм правильно выделяет разряды, не пропуская их [6]. В ходе экспериментов специфичность составила 60-70%, а чувствительность — 70-80%. Эти результаты подтверждают, что

разработанный алгоритм обладает достаточной точностью для автоматического обнаружения и классификации лимбических разрядов.

Автоматизация процесса анализа позволяет сократить время обработки данных, снизить субъективность результатов и сосредоточить внимание исследователей на интерпретации выявленных паттернов. Короткие разряды, характеризующиеся постоянной частотой и малой длительностью, по своим характеристикам близки к разрядам абсансной эпилепсии, которые были изучены в наших других работах. Это позволяет предположить, что методы, разработанные ранее для обнаружения абсансных разрядов [7-9], могут быть адаптированы для обнаружения коротких разрядов при лимбической эпилепсии.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-22-00406.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bertram E.H. The functional anatomy of spontaneous seizures in a rat model of chronic limbic epilepsy // *Epilepsia*. – 1997. – Vol. 38. – P. 95–105.
2. Cavalheiro E.A. The pilocarpine model of epilepsy // *The Italian Journal of Neurological Sciences*. – 1995. – Vol. 16. – P. 33–37.
3. Pavaloiu M. I. Raducanu, G. Petrescu, L. Dragoi Programming environments for learning digital signal processing // 12th International Technology, Education and Development Conference. – 2018. – Vol. 12. – P. 6376-6383.
4. Короновский А.А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения // Физматлит. – 2003. – С. 3.
5. A. Ovchinnikov, A. Lüttjohanna, A. Hramov, G. van Luijcklaar An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents // *Journal of Neuroscience Methods*. – 2010. – Vol. 3. – P. 6-9.
6. Ситникова Е. Ю. Анализ электрической активности головного мозга при абсанс-эпилепсии: прикладные аспекты нелинейной динамики // *Известия Вузов ПНД*. – 2011. – № 19. – С.173-182.
7. Ершова А.С., Грищенко А.А., Сулейманова Е.М., Виноградова Л.В., Сысоев И.В. Разработка метода автоматической разметки пик-волновых разрядов у крыс-фармакологических моделей абсансной эпилепсии // В сборнике: современная нейробиология: фундаментальные исследования и практические аспекты. материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти профессора Калимуллиной Лилии Барыевны. – Уфа. – 2022. – С. 111-117. DOI:10.33184/snfipa-2022-10-19.12
8. Ershova A. S., Suleymanova E. M., Grishchenko A. A., Vinogradova L. V., Sysoev I. V., Analysis of connectivity estimates in the pentylentetrazol rat model of absentee epilepsy using estimating mutual information and phase coherence index // 7th Scientific School "Dynamics of Complex Networks and their Applications" (DCNA). 2023. – Vol. 7. – P. 78-81. doi: 10.1109/DCNA59899.2023.10290339.
9. Ершова А. С., Сулейманова Е.М., Грищенко А.А., Виноградова Л.В., Сысоев И.В. Межполушарная симметрия и асимметрия пик-волновых разрядов абсансного типа, вызванных системным введением пентилентетразола // *Российский физиологический журнал им. Сеченова*. – 2023. – Т. 109. – № 2. – С. 241–251. DOI: 10.31857/S0869813923020048.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ МОЗГА У КРЫС-
МОДЕЛЕЙ В СОСТОЯНИИ БОДРСТВОВАНИЯ

А.Ю. Долинина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ dolinina13nastya@yandex.ru

Введение. Мозг – сложная система, принципы работы которой еще недостаточно изучены. Электроэнцефалографическая активность (ЭЭГ), получаемая с различных областей мозга млекопитающих, активно используется для исследования физиологии, фармакологии, развития и старения мозга. Электроэнцефалографические данные указывают на общие черты между разными видами млекопитающих с точки зрения развития и распространения ритмов мозга, в том числе между человеком и крысами [1]. Так же, как и для человека, для крыс выделяют такие диапазоны ЭЭГ, как альфа-диапазон (10–15 Гц, 50 мкВ), бета-диапазон (15–50 Гц, 25 мкВ), дельта-диапазон (1–4 Гц, 100–300 мкВ), тета-диапазон (4–8 Гц – у людей, 5–10 Гц – у грызунов, 100–300 мкВ), гамма-диапазон (60–170 Гц, < 10 мкВ) [2]. В данном исследовании анализировался только тета-ритм ЭЭГ как представитель одного из двух основных биологических состояний – бодрствования.

Основной задачей данной работы является проведение частотно-временного и фазового анализа динамики экспериментальных сигналов локальных потенциалов, полученных из гиппокампа головного мозга крыс во время бодрствования.

Материалы. Для анализа использовались фоновые записи электроэнцефалограмм, используемые для контроля при исследовании влияния агониста каннабиноидов на эпилептический статус у крыс линии Wistar, разведенных в питомнике «Столбовая» [3]. Локальные потенциалы от свободно движущихся животных были получены с лобной коры и гиппокампа с правого и левого полушария. Каждая крыса регистрировалась в течение 2х суток. Сигнал был оцифрован с постоянной частотой дискретизации 258 Гц. Из всех крыс, участвующих в эксперименте, было отобрано 14 записей ЭЭГ с необходимым уровнем сигналов и с отсутствием артефактов, способных повлиять на результаты вычислений. Выборка производилась в некоторых случайно выделенных отрезках времени с длительностью от 30 минут до 1 часа. Для каждой крысы было проанализировано по 5 таких отрезков.

Методы и результаты. В первую очередь была произведена разметка и разбиение отрезков сигналов на интервалы с выраженным тета-ритмом. Разметка производилась исходя из особенностей структуры, формы сигнала и его частотных свойств, присущих для анализируемого состояния. Длина каждого интервала составила 10 секунд. Для разметки временных рядов ЭЭГ был использован спектральный анализ. Результат спектрального анализа выражается в виде спектрограммы, которая представляет собой зависимость спектральной плотности мощности от времени. Для получения спектров частот сигнала использовалось оконное преобразование Фурье. По умолчанию использовалось окно Ханна, длина окна составила 1 секунду. Временное окно смещалось вдоль всего исследуемого сигнала с шагом по времени равным шагу выборки $\Delta t = \frac{1}{258}$ сек и 99% перекрытием. Временные ряды локальных потенциалов мозга из обоих полушарий гиппокампа и их спектрограммы представлены на рисунке 1(а-с).

Основная особенность тета-ритма, выявленная при анализе полученных результатов состояла в наличии частотной активности, схожей с тета-ритмом, в диапазоне частот соответствующему удвоенному значению основного диапазона. Данная особенность наблюдалась как для сигналов из правого полушария, так для сигналов из левого. Для детального изучения данного свойства сигнала были рассмотрены два не перекрывающихся

диапазона частот: 6-12 Гц и 12-24 Гц. В первый диапазон укладываются частоты тета-ритма, второй диапазон является удвоенным значением первого. Для данных диапазонов были рассчитаны скелетоны для интервалов из каждого полушария. Для визуальной оценки схожести динамики частоты скелетоны двух гармоник совмещались, при этом значения частот, соответствующих второй гармонике, делились пополам. В результате во многих проанализированных отрезках были найдены интервалы разной длительности, у которых частотно-временная структура второй гармоники повторяла структуру первой с погрешностью 1 Гц. В следствии чего можно предположить наличие частной синхронизации [4] между основной и второй гармониками сигнала. Примеры скелетона одного 10-секундного интервала представлен на рисунке 1(е,ф).

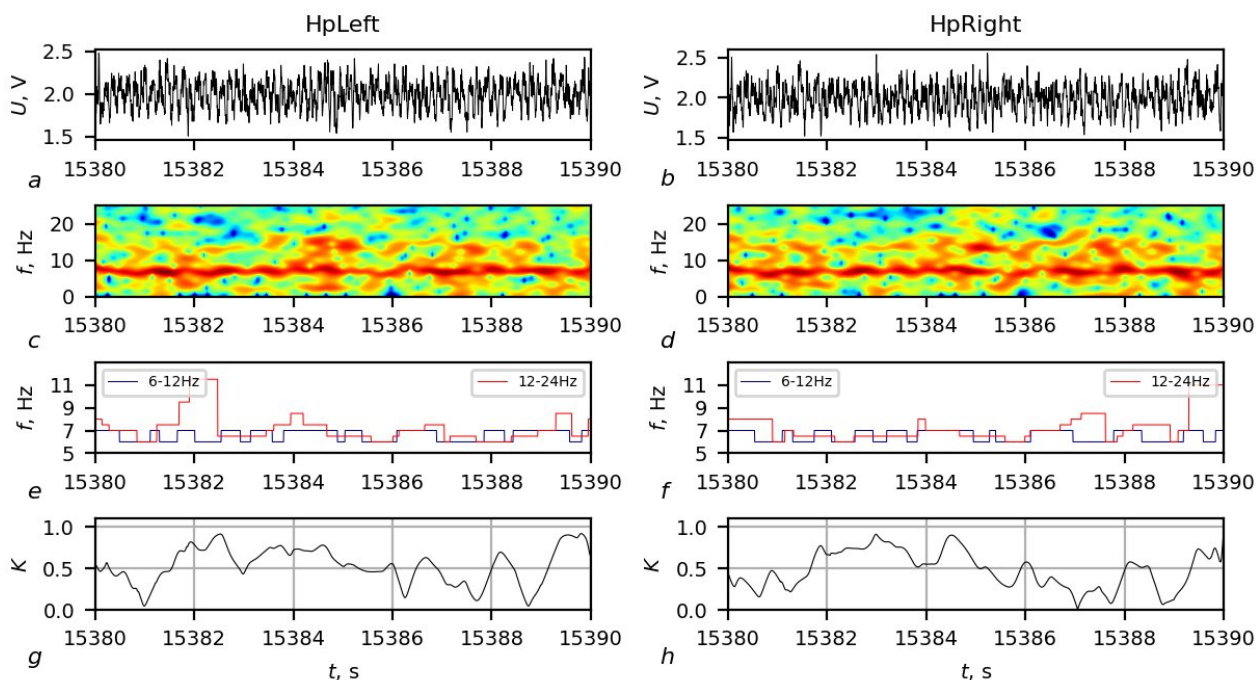


Рис.1 Частотно-временная структура сигнала длительностью 10 с одной из крыс для правого (а,с,е,г) и левого (b,d,f,h) полушария гиппокампа. Первый график сверху (а,b) – временной ряд ЭЭГ, второй (с,d) – спектрограмма сигнала, третий (е,f) – его скелетоны в двух исследуемых диапазонах частот, четвёртый (g,h) – график изменения коэффициента фазовой синхронизации. По горизонтальной оси указано время в секундах, по вертикальной для временных рядов (а,b) – напряжение в В, для спектрограмм – частота в Гц. Мощность на спектрограммах выделена цветом

Однако, спектральная плотность мощности, которая была использована для построения скелетонов, не содержит информации о фазах и их корреляции. В данном исследовании нас интересует изучение поведения фазы сигнала, а также наличие или отсутствие фазовой синхронизации между указанными диапазонами частот в сигналах гиппокампа. Под фазовой синхронизацией понимается процесс, при котором два или более сигнала, в нашем случае это волны мозговой активности, имеют частоты близкие друг к другу, что приводит к их синхронному колебанию [5].

Для исследования использовался такой метод, как расчёт коэффициента фазовой синхронизации (КФС) в виде следующей меры

$$K = \left\| \left\langle e^{j(m_x \varphi_x - m_y \varphi_y)} \right\rangle \right\|,$$

где K – значение коэффициента фазовой синхронизации; j – мнимая единица; угловые скобки означают процедуру усреднения; φ_x и φ_y – фазы сигналов, полученных из аналитического

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

сигнала в каждом из диапазонов, m_x и m_y коэффициенты кратности, в нашем случае $m_x = 2$ и $m_y = 1$.

Значение коэффициента изменяется от значения 0 (полная асинхронность) до значения 1 (полная синхронность). Для выделения мгновенной фазы сигнала использовался один из классических методов обработки данных — преобразование Гильберта. Так как значения мгновенной фазы во втором диапазоне будут возрастать в 2 раза быстрее, чем в первой, то для верности дальнейших расчетов значения мгновенной фазы сигнала из первого диапазона умножались на 2.

Полученные результаты значений коэффициента оказались крайне низкими. В большинстве интервалов значение КФС стремилось к 0, что означало отсутствие какой-либо фазовой синхронизации, несмотря на то, что предполагаемая частотная синхронизация отчетливо себя проявляла. В следствии чего было решено рассчитать К в скользящем окне для каждого интервала. За длину окна выбрано значение 1 с. Временное окно смещалось вдоль всего интервала с шагом по времени 0,01 с. Значения окна и шага были подобраны эмпирически.

На графиках коэффициента фазовой синхронизации, представленных на рисунке 1(g,h), видно, как К меняет свое значение в течении всего исследуемого интервала бодрствования для двух исследуемых диапазонов частот. Для тех моментов времени, где наблюдалась предполагаемая частотная синхронизация, можно было наблюдать значение КФС от 0,5 до 0,9, что может свидетельствовать о наличии фазовой синхронизации в этих временных точках. Однако, изменение коэффициента в течении указанного интервала происходит чаще, нежели соотношение основных частот на скелетоне. В результате анализа динамики КФС, полученной для исследуемых интервалов, было выяснено, что значение коэффициента способно сохранять положение выше 0,5 не дольше примерно 2,5 секунд. Такое поведение фазы было характерно для большинства исследуемых интервалов.

Заключение. Частотно-временной анализ и фазовый анализ позволили более детально изучить структуру сигналов бодрствования, в частности, сигналов в тета-диапазоне. Помогли выявить и подтвердить общую структуру, некоторые особенности и вариации динамики тета-ритма. Из полученных результатов можно заключить, что основные частоты и фазы в указанных диапазонах могут быть связаны в течении некоторого промежутка времени. Данная выявленная особенность может свидетельствовать о наличии как частотной, так и фазовой синхронизации между основной и второй гармоникой сигнала, а следовательно и о его нелинейности, соответствующего состоянию бодрствования с ярко выраженным тета-ритмом.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-25-00219.

ЛИТЕРАТУРА

1. Waldhoer M., Bartlett S.E., Whistler J.L. Opioid receptors // Annu Rev Biochem. – 2004. – Vol.73. – P. 953-990.
2. Ноздрачев А.Д., Баженов Ю.И., Баранникова И.А. Общий курс физиологии человека и животных. Книга первая. Физиология нервной, мышечной и сенсорной систем. – М:Высшая школа, 1991. – 509 с.
3. Suleymanova E.M., Shangaraeva V.A., van Rijn C.M., Vinogradova L.V. The cannabinoid receptor agonist WIN55. 212 reduces consequences of status epilepticus in rats // Neuroscience. – 2016. – Vol.334. – P. 191–200.
4. Blekhman I.I. Frequency synchronization and its possible role in microworld phenomena // Automation and Remote Control. – 2020. – №81. – P.1405–1412.
5. Пиковский А.С., Роземблум Н.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.:Техносфера, 2003. – 493 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАВОВЫХ ПОТОКОВ С ПОМОЩЬЮ
НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

С.А. Жорник, Р.Р. Иксанова, Д.А. Тархов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ sofiazhornik2015@gmail.com

Введение. Современные вычислительные технологии и сенсорные системы расширяют применение machine learning (ML) в моделировании, особенно для задач, в которых трудно построить точную математическую модель. Одной из таких задач является прогнозирование лавовых потоков для снижения рисков для людей, находящихся вблизи действующего вулкана. Классические гидродинамические модели используют численные методы, но их точность ограничена сложностью учета рельефа и свойств лавы. Чаще исследуются течения по плоским поверхностям, что не всегда отражает реальность. Физически информированные нейросети (PINN) [1] эффективно решают задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, учитывая физические принципы и экспериментальные данные. Их применение в моделировании лавовых потоков повышает точность прогнозов и восполняет пробелы классических методов. В данной работе рассматривается прогнозирование динамики лавовых потоков на основе математического моделирования движения вязкой жидкости по наклонной изогнутой поверхности в рамках аналогии с лавовым потоком; также реализована нейросетевая модель, построенная на основе данных.

Обзор моделей из литературы. Для более глубокого понимания поведения вязких потоков на наклонных поверхностях, аналогичных лавовым, были проанализированы несколько ключевых теоретических моделей. Ниже приведён их подробный обзор с обсуждением применимости к поставленной задаче.

Huppert [2] предложил аналитическое решение для двухмерных и осесимметричных течений вязкой жидкости на горизонтальной поверхности. Он рассмотрел распространение гравитационного тока при постоянной плотности и вязкости. Основное уравнение выведено на основе закона сохранения массы и гравитационного давления. Полученное решение описывает зависимость радиуса фронта от времени

$$r(t) = \left(\frac{Qg}{\nu}\right)^{1/8} * t^{1/8},$$

где Q – расход жидкости, g – ускорение свободного падения, ν – кинематическая вязкость.

Модель применима только к горизонтальной поверхности, что ограничивает её использование для лавовых потоков на склонах. Тем не менее, она полезна как базовый ориентир при оценке масштабов распространения.

Takagi D. [3] предложил расширение предыдущей модели на случай наклонной плоскости. В работе рассматриваются как аналитические решения (в специальных случаях), так и численное моделирование фронта распространения. Модель описывает как длину, так и форму фронта при различных параметрах, включая вязкость, объём, угол наклона.

Работа [4] представляет собой обширный обзор динамики тонких жидкостных плёнок. Рассматриваются процессы под действием гравитации, поверхностного натяжения и межфазного взаимодействия. Модель описывает широкий спектр явлений, включая неустойчивости, капиллярные волны и термокапиллярное течение.

Хотя модель обладает высокой степенью универсальности, её применение к задачам моделирования лавы требует значительных упрощений. Тем не менее, она может служить базой для дальнейших модификаций, особенно при анализе неустойчивостей фронта.

Осипцов А.А., автореферат «Асимптотические модели течений лавы на криволинейной подстилающей поверхности» [5] – здесь модель описывает остывающее течение лавы по

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

осесимметричной искривленной поверхности с учетом вязкости, зависящей от температуры. Применяются уравнения Навье-Стокса для нестационарного неизотермического течения несжимаемой жидкости. На поверхности вне области массопода действует условие прилипания, внутри – профиль скорости. На свободной границе учитываются кинематические и динамические условия, включая теплопередачу. Течение разделяется на две подсистемы: внутреннюю и внешнюю. Внутренняя область имеет масштаб LL, малый наклон потока, горизонтальная скорость мала. Внешняя область значительно больше радиуса массопода, что позволяет считать ее точечной. Вводятся малые параметры, связанные с силой тяжести и характеристиками течения.

Таблица 1. Сравнительный анализ методов.

Модель	Учитывает наклон	Осесимметрия	Решение	Применимость
Huppert, Н. Е. [2]	Нет	Да	Аналитическое	Горизонтальные потоки
Takagi, D. [3]	Да	Да	Аналитическое / Численное	Наиболее релевантная
Oron, A., Davis, S. H., & Bankoff, S. G. [4]	Частично	Общая	Численное	Универсальная, требует адаптации
Осипцов, А.А. [5]	Да	Нет	Численное	Реалистичное моделирование

Исходя из Таблицы 1, для условий лабораторного эксперимента и задач предсказания фронта лавы на наклонной поверхности, наиболее подходящей является модель [5], так как она напрямую учитывает наклон и режим тонкоплёночного течения при высокой вязкости.

Модель и проведение эксперимента. В качестве модели поведения лавы при извержении вулкана были взяты спортивный конус (является усечённым) и мёд. Две видеокамеры снимали эксперимент сверху и сбоку, пока с вершины фигуры лился мёд. На конусе была сделана разметка, где вертикальные линии – это разделение по 30° , а горизонтальные линии соответствовали уровням, у которых разница между высотами конуса составляла 1 см. Благодаря записи на видео можно построить зависимость параметров от времени в полярных координатах, сами же параметры считывались с помощью программы для обработки изображений OpenCV [6]. В дальнейшем параметры переводились в декартовы координаты. Были известны и характеристики мёда при 25°C – его плотность и коэффициент вязкости.

Анализ данных. Выделение контуров потока и определение экспериментальной зависимости положения фронта от угла и времени производилось с помощью программы для обработки изображений, написанной на Python с использованием OpenCV [6], где видео разбивалось на кадры с периодичностью 0,5с.

Обучение нейросети. В качестве метода моделирования было выбрано физически-информированное нейросетевое моделирование распространения вязкой жидкости по наклонной изогнутой поверхности. В роли обучающей выборки был использован 43-точечный набор (координаты точек X, Y и соответствующие значения радиуса G). Форма нейросети была выбрана с физическим смыслом – не произвольная архитектура, а эмпирически калиброванная:

$$u(x,y) = \sum c_i \cdot \tanh(a_i(x - x_{c_i}) + b_i(y - y_{c_i})), \quad (1)$$

где a, b, c — параметры нейрона; x_c , y_c — координаты центра нейрона. В данной работе использовалась сеть из 5 нейронов (слагаемых в сумме).

Градиенты (производные) для обучения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_c} &= -a \operatorname{sech}^2(\dots); \quad \frac{\partial u}{\partial y_c} = -b \operatorname{sech}^2(\dots) \\ \frac{\partial u}{\partial a} &= c(x - x_c) \operatorname{sech}^2(\dots); \quad \frac{\partial u}{\partial b} = c(y - y_c) \operatorname{sech}^2(\dots) \\ \frac{\partial u}{\partial c} &= \tanh(\dots) \end{aligned} \quad (2)$$

Для обучения нейросети и оптимизации параметров сети был применён метод градиентного спуска (то есть по сути – метод наискорейшего спуска для минимизации среднеквадратичной ошибки между предсказанием и экспериментом) со стабильной скоростью 0,01. Оптимизация велась по функции ошибки среднеквадратичного отклонения (MSE):

$$\delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (u(x_i, y_i) - G_i)^2 \quad (3)$$

Для оценки были использованы следующие метрики:

MAE (Mean Absolute Error):

$$\text{MAE} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |G_i - \widehat{G}_i| \quad (4)$$

MAPE (Mean Absolute Percentage Error):

$$\text{MAPE} = \frac{100}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{G_i - \widehat{G}_i}{G_i} \right| \% \quad (5)$$

R^2 (коэффициент детерминации):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (\widehat{G}_i - G_i)^2}{\sum (G_i - \bar{G})^2} \quad (6)$$

$\delta_{\min}$ – среднеквадратичное отклонение по оптимальной конфигурации.

Результаты обучения и тестирования: MAE = 0,52; MAPE = 22,6%; $\delta_{\min} = 1,96$; $R^2 = 0,14$

Коэффициент детерминации R^2 в идеале должен быть равен 1.0, что означает, что модель полностью объясняет данные. Получившийся коэффициент 0.14 говорит о том, что модель хоть и уловила некоторые закономерности, но из-за упрощённой архитектуры и малого числа нейронов не смогла адекватно отразить всю структуру зависимости. Низкое значение свидетельствует о потенциале для существенного улучшения модели.

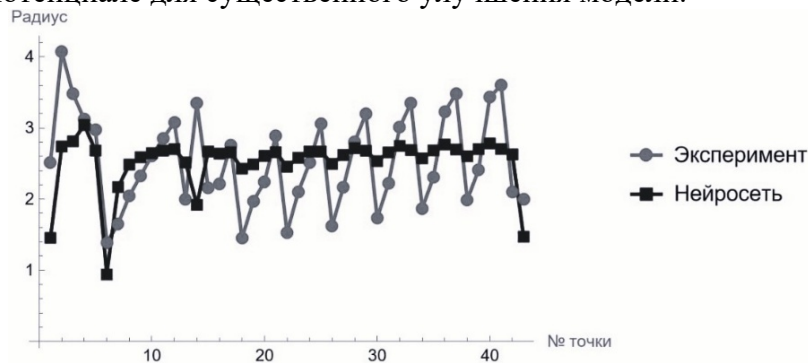


Рис. 1. График сравнения экспериментальных и предсказанных значений. Линия с круглыми маркерами - экспериментальные данные, линия с квадратными маркерами - предсказания модели

Далее было проведено сравнение экспериментальных значений с теми, которые были предсказаны нейросетью в процессе обучения. На рисунке 1 приведён соответствующий график, который позволяет визуально оценить качество аппроксимации.

Ранее были рассчитаны абсолютные ошибки для каждой конкретной координаты. На рисунке 2 показан график, на котором видны зоны, где модель предсказывает хуже всего – это ошибки более 0,5.

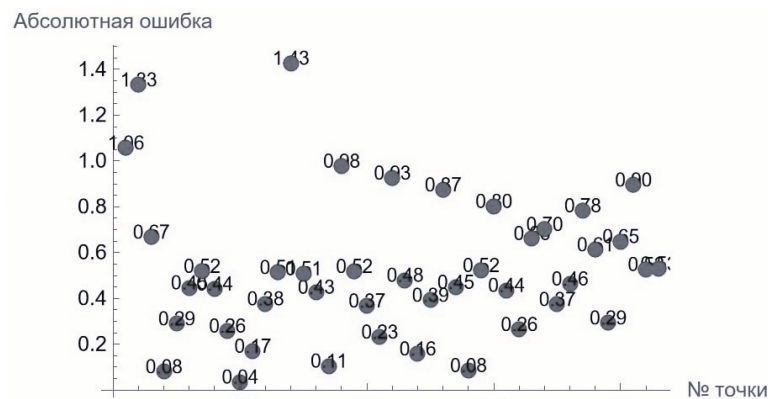


Рис. 2. Абсолютная ошибка по каждой точке. Видно, что ошибки варьируются: присутствуют области с высокой точностью и слабыми результатами

Заключение. Работа позволила продемонстрировать, как даже простая нейросетевая архитектура может аппроксимировать экспериментальные данные. Несмотря на наличие локальных ошибок, в целом сеть успешно восстановила общую структуру зависимости. Полученные результаты создают основу для уточнения нейросетевой модели на основе дифференциальных уравнений [5] методов посторения физически информированных нейронных сетей [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarkhov, D.; Vasilyev, A. Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins // Development, Academic Press: Cambridge, MA, USA. – 2020.
2. Huppert, H. E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents // Journal of Fluid Mechanics. – 1982.
3. Takagi, D. Spreading of viscous fluids and granular materials on slopes // A dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy. – 2010.
4. Oron, A., Davis, S. H., & Bankoff, S. G. (1997). Long-wave evolution of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. – 1997.
5. Осипцов, А.А. Асимптотические модели течений лавы на криволинейной подстилающей поверхности // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – 2006.
6. OpenCV - Open Computer Vision Library. – <https://opencv.org/>

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ОДНОГО ЧАСТНОГО ВИДА

К.Д. Журавлева¹, А.Д. Журавлева²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Бауманский государственный технический университет

✉ kseniyazhuravleva.dm@gmail.com

Гипергеометрическим называют степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

отношение соседних коэффициентов которого является рациональной функцией номера n [1]:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}, \text{ где } Q, P - \text{многочлены.}$$

Сходящиеся гипергеометрические ряды используют для представления элементарных и специальных функций [2, с.370-372, 375-376]. В данной работе построен рекурсивный алгоритм получения явного выражения суммы сходящегося гипергеометрического ряда частного вида:

$$\sum_{n \geq 0} n^p z^n = z + 2^p z^2 + 3^p z^3 + \dots + n^p z^n + \dots, \quad |z| < 1, p \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

В случае $p = 0$ ряд (1) превращается в геометрический ряд (ряд геометрической прогрессии)

$$\sum_{n \geq 0} z^n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \quad (2)$$

сумма σ^0 которого, как известно, выражается формулой:

$$\sigma^0 = \frac{z}{1-z}.$$

Далее используются обозначения: σ^p - для суммы ряда (1) и S_n^p - для его n -ой частичной суммы.

В случае $p = 1$ ряд (1) примет вид

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + n \cdot z^n + \dots. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что частичные суммы рядов (2) и (3) связаны соотношением

$$(S_n^0 + S_n^1)z = S_{n+1}^1 - z,$$

поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, и учитывая сходимость рядов (2) и (3), получаем

$$(\sigma^0 + \sigma^1)z = \sigma^1 - z,$$

откуда выражаем сумму ряда (3):

$$\sigma^1 = z \frac{\sigma^0 + 1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

В случае $p = 2$ ряд (1) принимает вид

$$z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \dots + n^2 z^n + \dots. \quad (4)$$

Воспользовавшись тождеством

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

можно установить связь между частичными суммами рядов (2), (3) и (4):

$$(S_n^2 + 2 \cdot S_n^1 + S_n^0)z = S_{n+1}^2 - z.$$

Откуда после предельного перехода получаем

$$(\sigma^2 + 2\sigma^1 + \sigma^0)z = \sigma^2 - z,$$

или

$$\sigma^2 = \frac{2\sigma^1 + \sigma^0 + 1}{1 - z} z.$$

Учитывая найденные ранее выражения для σ^0 и σ^1 , получаем формулу для суммы ряда (4):

$$\sigma^2 = \frac{(z + 1)z}{(1 - z)^3}.$$

Аналогичные рассуждения для $p = 3$ дают зависимость

$$(S_n^3 + 3 \cdot S_n^2 + 3 \cdot S_n^1 + S_n^0)z = S_{n+1}^3 - z,$$

которая после предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ приводит к равенству

$$(\sigma^3 + 3\sigma^2 + 3\sigma^1 + \sigma^0)z = \sigma^3 - z,$$

а затем к выражению суммы ряда:

$$\sigma^3 = \frac{3\sigma^2 + 3\sigma^1 + \sigma^0 + 1}{1 - z} z.$$

Отсюда после подстановки выражений для σ^0, σ^1 и σ^2 находим:

$$\sigma^3 = \frac{z^2 + 4z + 1}{(1 - z)^4} z.$$

В случае произвольного $p > 3$ для установления связи между частичными суммами придется использовать формулу бинома

$$(S_n^p + C_p^{p-1} \cdot S_n^{p-1} + \dots + C_p^1 \cdot S_n^1 + S_n^0)z = S_{n+1}^p - z,$$

а зависимость между суммами $\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^p$ рядов (1) примет вид:

$$(\sigma^p + C_p^{p-1} \sigma^{p-1} + \dots + C_p^1 \sigma^1 + \sigma^0)z = \sigma^p - z.$$

Тогда

$$\sigma^p = \frac{C_p^{p-1} \sigma^{p-1} + C_p^{p-2} \sigma^{p-2} + \dots + C_p^1 \sigma^1 + \sigma^0 + 1}{1 - z} z. \quad (5)$$

Таким образом, используя (5), можно последовательно получать выражения для σ^p при любых значениях p . Полученное выражение (5) имеет рекурсивный характер, но, к сожалению, глубина рекурсии равна показателю p .

С помощью (5) были также получены формулы

$$\sigma^4 = \frac{4\sigma^3 + 6\sigma^2 + 4\sigma^1 + \sigma^0 + 1}{1 - z} z = \frac{z^3 + 11z^2 + 11z + 1}{(1 - z)^5} z,$$

$$\sigma^5 = \frac{5\sigma^4 + 10\sigma^3 + 10\sigma^2 + 5\sigma^1 + \sigma^0 + 1}{1 - z} z = \frac{z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1}{(1 - z)^6} z.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Интернет энциклопедия Википедия. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_hypergeometric_function/ (дата обращения: 20.03.2025).
2. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.:Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

МОДЕЛЬ ЧАСТОТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В ТАЛАМОКОРТИКАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

А.А. Капустников¹, М.В. Сысоева¹, И.В. Сысоев^{1,2}¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого²Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

✉ anton.kapustnikov.02@mail.ru

Введение. За последние 20 лет было написано множество математических моделей таламо-кортикальной системы для моделирования сна и бодрствования. От больших модельных сетей, насчитывающих в себе от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч нейронов [1-3], до редуцированных моделей, насчитывающих всего 3 элемента в ансамбле [4]. От использования упрощенных моделей осцилляторов, до использования физиологических моделей для каждого из рассматриваемых типов нейронов [1]. При математическом моделировании авторы использовали физиологические модельные уравнения для каждого из четырех типов нейронов, которые находятся в таламо-кортикальной системе и представляют её специфичные области. А также с помощью специальных уравнений моделировались глутаматергические и ГАМК-ергические синапсы, поскольку в таламо-кортикальной сети существуют как возбуждающие, так и угнетающие связи. Цель данной работы — продемонстрировать колебательную систему моделирующую таламо-кортикальную сеть и обладающую следующими свойствами, предположительно зависящими от архитектурных особенностей сети: свойством вынужденного колебательного режима системы и свойством преобразователя частоты (от высокочастотной спайковой активности к низкочастотной берстовой активности).

Модель. Таламо-кортикальная сеть включает в себя четыре различных типа нейронов, для каждого из которых анатомически характерны различные виды связи между друг другом. В ней рассматриваются возбуждающие (пирамидальные (*PY*) и таламо-кортикальные нейроны (*TC*)) и ингибирующие (ретикулярные (*RE*) нейроны и интернейроны (*IN*)) клетки. В данной работе каждый из четырех типов нейронов моделируется собственными уравнениями, в основе которых лежит модель Ходжкина-Хаксли.

Структура таламо-кортикальной сети из $D = 27$ нейроосцилляторов, представляет собой квадратную матрицу связности, где $D_{PY} = 9$ (включая внешний корковый нейрон PY_{out}), $D_{IN} = 2$, $D_{TC} = 8$, $D_{RE} = 8$. За счет коэффициента связи (k) между различными типами клеток было необходимо вывести систему в возбужденное, но неколебательное состояние (вблизи бифуркации возникновения цикла). Величина коэффициента связи (k_{ij}) между нейронами в данной сети была различна, значения представлены ниже в табл. 1. Возможность связи между различными типами нейронов ограничивалась исходя из анатомических законов таламо-кортикальной системы. *PY*-клетки могут воздействовать на любые нейроны (в том числе и на нейроны своего типа); *TC*-клетки могут также воздействовать на любые клетки (кроме нейронов собственного типа); *IN*-клетки могут воздействовать на пирамиды и на другие интернейроны; *RE*-клетки могут воздействовать на *TC*-клетки и на другие ретикулярные нейроны, что также показано ниже в табл. 1.

Табл. 1. Величина коэффициента связи от вида нейронной связи

	$\rightarrow PY$	$\rightarrow IN$	$\rightarrow TC$	$\rightarrow RE$	$\rightarrow PY_{out}$
$\rightarrow PY$	0.4	0.4	4.0	0.4	—
$\rightarrow IN$	-1.95	-1.95	—	—	—
$\rightarrow TC$	1.95	1.95	—	1.95	—
$\rightarrow RE$	—	—	-1.95	-1.95	—
$\rightarrow PY_{out}$	—	—	1.95	—	—

Результаты. Свойство вынужденного колебательного режима данной системы заключается в том, что после окончания внешнего воздействия система прекращает колебательную активность. Для этого авторы предполагают, что в коре, за пределами основной таламо-кортикальной системы, существует PY -клетка (в данной работе PY_{out} -клетка), которая постоянно генерирует спайковую активность из высокого гамма-диапазона (в данной работе при частоте примерно 210 Гц). Данная клетка является внешним водителем дельта-ритма таламо-кортикальной системы, поскольку данный сигнал находится за её пределами и, преобразовываясь к низкочастотной (2-3 Гц) бёрстовой активности, распространяется по всей таламо-кортикальной системе, где вся система играет роль преобразователя частоты и находится в состоянии вынужденного колебательного режима, поскольку после окончания внешнего воздействия все 26 нейронов сети прекращают колебательную активность рис. 1. Следует отметить, что от архитектуры зависит, на сколько регулярной будет бёрстовая активность.

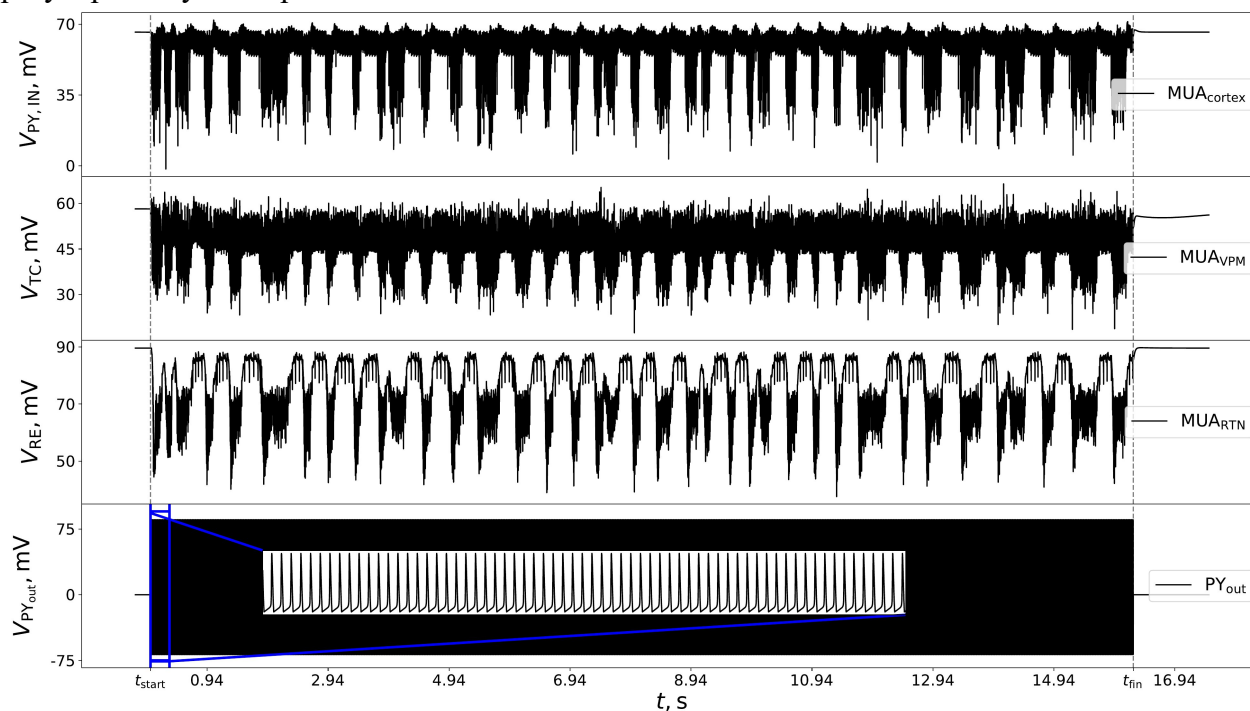


Рис. 1. Временные ряды многоэлементной активности (V), суммированные по типам нейронов таламо-кортикальной сети, которые играют роль преобразователя частоты, до подключения, во время и после отключения от внешнего воздействия (серые пунктирные линии, где t_{start} – это начало, а t_{fin} – конец воздействия со стороны внешнего пирамидального нейрона (PY_{out}))

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-25-00219.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazhenov, Maxim. Model of thalamocortical slow-wave sleep oscillations and transitions to activated states / Maxim Bazhenov, Igor Timofeev, Mircea Steriade, Terrence J. Sejnowski // Journal of Neuroscience. — 2002. — Vol. 22, no. 19. — P. 8691–8704.
2. Hill, Sean. Modeling sleep and wakefulness in the thalamocortical system / Sean Hill, Giulio Tononi // Journal of Neurophysiology. — 2005. — Vol. 93, no. 3. — P. 1671–1698.
3. Bugnon, Tom. Sleep and wake in a model of the thalamocortical system with martinotti cells / Tom Bugnon, William G. P. Mayner, Chiara Cirelli, Giulio Tononi // European Journal of Neuroscience. — 2022.
4. Paul, Kush. Presence of a chaotic region at the sleep-wake transition in a simplified thalamocortical circuit model / Kush Paul, Lawrence J. Cauller, Daniel A. Llano // Frontiers in Computational Neuroscience. — 2016. — Vol. 10.

АППРОКСИМАЦИЯ ПАДЕ В МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Н.А. Матвеев, П.Е. Бакаев, П.А. Поляков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ matveev_nikolya2000@mail.ru

Введение. Методы суммирования асимптотических рядов, в частности аппроксиманты Паде (АП), играют важную роль в теоретической физике и прикладных науках. АП обеспечивают глобальную аппроксимацию функций в контексте асимптотических методов даже при наличии сингулярностей или расходимости рядов [1, 4]. В отечественной научной литературе методы АП получили значительное развитие, включая адаптированные для практики руководства и примеры применения в радиофизике, гидродинамике и нелинейной динамике [2, 3, 5].

Методология исследования включает численное моделирование и применение АП к конкретным физическим задачам, таким как описание пограничных слоев в гидродинамике.

Значимость работы определяется её вкладом в объединение теоретических и практических аспектов: синтез методов АП с прикладными задачами открывает новые возможности для решения сложных проблем математической физики, сохраняя связь с инженерными и физическими приложениями.

Определение АП. АП — это дробно-рациональная аппроксимация, при которой асимптотическое разложение $f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon^i$ заменяется отношением двух полиномов

$$f_{[n/m]}(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon + \dots + a_n \varepsilon^n}{b_0 + b_1 \varepsilon + \dots + b_m \varepsilon^m}, \quad (1)$$

коэффициенты которых определяются из соотношения

$$(b_0 + b_1 \varepsilon + \dots + b_m \varepsilon^m)(c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \dots) = a_0 + a_1 \varepsilon + \dots + a_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+m+1}). \quad (2)$$

В результате мы приходим к так называемым аппроксимантам, введенным А. Паде в 1892, которые ранее рассматривались Коши и Якоби, затем обобщены Бейкером [4]. В практике приближенных решений прикладных задач ценность АП заключается в аналитической форме полученных решений. Существует много примеров применения АП в решении задач с малым параметром, которые являются предметом асимптотических методов в прикладной математике.

Пример. Воспользуемся задачей, представленной в качестве упражнения для самостоятельного решения [1, с. 30]. Задано нелинейное уравнение

$$x = 1 + \varepsilon x^2 \quad (3)$$

Требуется найти асимптотическое решение уравнения (3) и сравнить его с точным решением, полученным при $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$. В данном примере мы дополнительно используем АП и сравним аппроксиманты порядков $F[1,1]$ и $F[2,2]$ с точным и асимптотическим решениями. Запишем прямое асимптотическое разложение

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots \quad (4)$$

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

Подставим (4) в уравнение (3)

$$\begin{aligned} \alpha_0 = 1: \quad 1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots &= 1 + \varepsilon (1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots)^2 \\ \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 &= \varepsilon (1 + 2\alpha_1 \varepsilon + 2\alpha_2 \varepsilon^2 + 2\alpha_3 \varepsilon^3 + 2\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon^3 + 2\alpha_1 \alpha_3 \varepsilon^4 + \\ &\quad + 2\alpha_2 \alpha_3 \varepsilon^5 + \alpha_1^2 \varepsilon^2 + \alpha_2^2 \varepsilon^4 + \alpha_3^2 \varepsilon^6) \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты разложения, приравнявая выражения при одинаковых степенях малого параметра

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad \alpha_1 &= 1 \\ \varepsilon^2: \quad \alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha_1 \\ \varepsilon^3: \quad \alpha_3 &= 2\alpha_2 + \alpha_1^2 \end{aligned}$$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 5$, соответственно получим

$$x = 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3$$

При $\varepsilon = 0,1$: Точное решение $x = 1,12707$. Асимптотическое разложение дает

$$x = 1 + 0,1 + 0,02 + 0,005 = 1,125 \quad (5)$$

Применим аппроксимацию Паде, следуя методологии (1), (2):

$$\begin{aligned} F[1,1] &= \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{1 + b_1 \varepsilon} \\ \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{1 + b_1 \varepsilon} &= 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 \\ 1 + b_1 + \varepsilon + b_1 \varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 + 2b_1 \varepsilon^3 &= a_0 + a_1 \varepsilon \\ \varepsilon^0: \quad a_1 &= 1 \\ \varepsilon^1: \quad b_1 + 1 &= a_1 \\ \varepsilon^2: \quad b_1 + 2 &= 0 \\ a_0 &= 1 \\ b_1 &= -2 \\ a_1 &= -1 \\ F[1,1] &= \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} = \frac{0,9}{0,8} = 1,125 \end{aligned}$$

Как можно видеть, АП первого порядка совпадает с асимптотическим разложением (5) с относительной погрешностью порядка 2%. Используя АП второго порядка, получим

$$F[2,2] = \frac{-13\varepsilon^2 + 11\varepsilon + 1}{-25\varepsilon + 10\varepsilon + 1} = \frac{1,97}{1,75} = 1,1257$$

Вычисления при $\varepsilon = 0.001$ дают точное решение $x = 1,001002$. АП первого и второго порядков при данном значении параметра ε практически совпадают с точным решением

$$\begin{aligned} F[1,1] &= \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} = 1,001002 \\ F[2,2] &= \frac{-13\varepsilon^2 + 11\varepsilon + 1}{-25\varepsilon + 10\varepsilon + 1} = 1,001002 \end{aligned}$$

Приведем график:

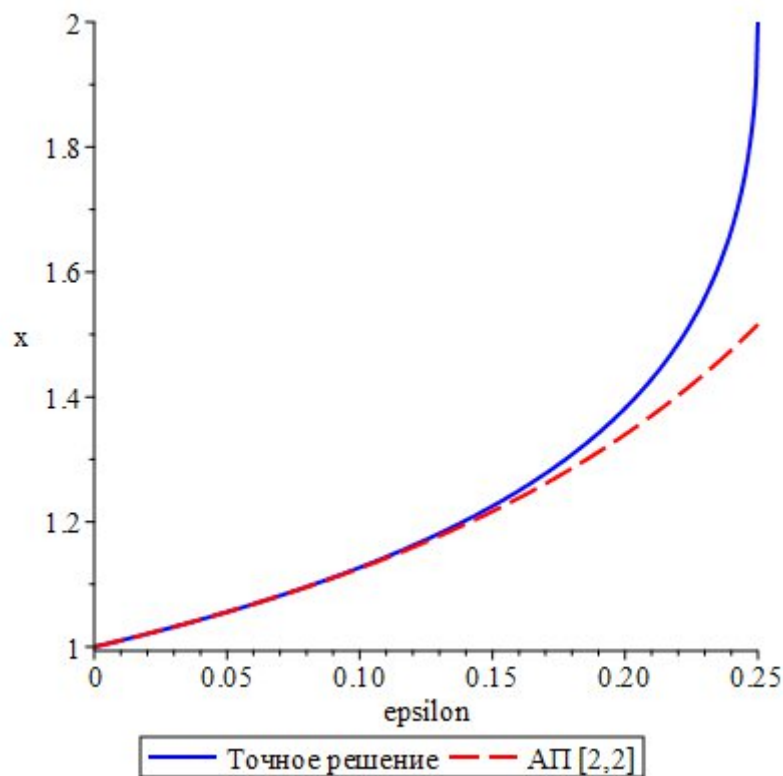


Рис. 1. Сравнение точного решения и АП

Поведение графика АП[2,2] относительно точного решения подтверждает очевидный факт, что погрешность приближения увеличивается с ростом параметра ϵ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 455 с.
2. Апресян Л.А. Аппроксиманты Паде // Изв. ВУЗов, Радиофизика. — 1979. — Т.13. — № 6. — С. 653-674.
3. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. — М.: Наука, 1989. — 334 с.
4. Baker G.A. Jr. Essentials of Padé Approximants. — New York: Academic Press, 1975. — 502 p.
5. Andrianov I., Shatrov A. Padé Approximants, Their Properties, and Applications to Hydrodynamic Problems //Symmetry. — 2021. — Vol.13. — № 10. — P. 1869. <https://doi.org/10.3390/sym13101869>

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ МАЛОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОЛЕМ РАВНОМОМЕНТНОЙ ЕМУ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Е.А. Никонова
ФИЦ ИУ РАН

✉ nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Введение. Подобно тому, как любая система сил, действующих на твёрдое тело, приводится к главному вектору силы и паре сил, существуют эквивалентные распределения масс твёрдого тела, сохраняющие динамическое поведение тела под действием одинаковых сил при одинаковых начальных условиях. Такие динамически неразличимые системы называются равномоментными или динамически эквивалентными системами. Общие требования к равномоментным системам сформулированы Э.Дж. Раусом [1]. Так, два тела или две системы масс являются равномоментными, если они имеют одинаковую общую массу, один и тот же центр масс и один и тот же тензор инерции относительно одной и той же системы координат. С одной стороны, масса тела характеризует его способность противостоять изменению скорости, тем самым являясь мерой инертности тела, с другой – в теории гравитации Ньютона масса порождает поле сил гравитационного тяготения, являясь таким образом источником силового поля. Если в уравнениях Ньютона-Эйлера, описывающих поступательную и вращательную динамику тела, участвуют лишь моменты распределения масс вплоть до второго порядка включительно, то потенциал поля гравитационного притяжения будет описываться тем точнее, чем больше моментов распределения масс различных, более высоких порядков, будет принято во внимание [2].

Одно и то же тело может быть равномоментным нескольким системам масс, и некоторые из этих систем могут оказаться более удобными для вычислений, чем другие. Э.Дж. Раус [1] предложил строить для тел равномоментные им системы материальных точек. Так, для перемещения тела в плоскости и пространстве требуется равномоментная система из, по меньшей мере, двух и четырёх жёстко связанных точечных масс соответственно [3-5].

Замечание 1. В [6] предложены аналитические методы, позволяющие находить для однородных тел вращения их эквиравитирующие (терминология позаимствована из [6]) аналоги в виде одномерных стержней как с вещественным, так и мнимым распределением плотности. Подробнее о проблеме построения эквиравитирующих стержней и дисков для тел с различной симметрией в распределении масс см., например, [7,8], а также [9].

Постановка задачи. Э. Дж. Раус [1] предложил ставить в соответствие телу B массы m равномоментную ему систему из четырёх материальных точек с равными массами, каждая из которых равна $3m/(20n^2)$, и пятой точки (вводимой для дополнения массы всей системы точек до массы тела m), помещённой в центре масс тела. Чтобы определить положения четырёх точек равных масс, для начала их располагают в вершинах правильного тетраэдра T , вписанного в сферу S_n радиуса $\sqrt{5}n$, центр которой совпадает с центром масс тела B . Преобразование сферы в эллипсоид растяжениями с коэффициентами $\sqrt{I_{200}/m}$, $\sqrt{I_{020}/m}$ и $\sqrt{I_{002}/m}$ вдоль главных центральных осей инерции тела делает правильный тетраэдр наклонным, а точки в его вершинах – искомыми. Здесь I_{200} , I_{020} и I_{002} – моменты распределения масс относительно главных плоскостей инерции, равные

$$I_{200} = \iiint_B x^2 dm, \quad I_{020} = \iiint_B y^2 dm, \quad I_{002} = \iiint_B z^2 dm. \quad (1)$$

соответственно. Выбор правильного тетраэдра $\mathcal{T}$ с точностью до поворота около его барицентра обуславливает неединственность системы материальных точек, равномоментной телу $\mathcal{B}$.

В качестве $\mathcal{B}$ рассмотрим малое небесное тело – астероид или ядро кометы. Наиболее распространенная модель формы таких тел – это многогранник с треугольными плоскими гранями, определяемый с помощью упорядоченного списка вершин, выраженных в виде векторов в некоторой фиксированной в теле системе отсчета, и набора граней, состоящих из номеров образующих их вершин. На гранях задана согласованная ориентация: если смотреть с конца внешней нормали, то обход вершин осуществляется против часовой стрелки. Для тел с триангулированной поверхностью в [10] (см. также [11-13]) предложен подход к вычислению моментов распределения массы различных порядков.

Ставится задача поиска среди описанных равномоментных систем пяти точечных масс такой совокупности точек, для которой моменты распределения масс третьего порядка наиболее близки к соответствующим моментам тела $\mathcal{B}$. В качестве оценки совпадения моментов примем среднеквадратичную ошибку $\mathcal{L}$ – сумму квадратов отклонений моментов системы точечных масс от соответствующих моментов тела $\mathcal{B}$.

Если для представления вращения тетраэдра $\mathcal{T}$ около его барицентра воспользоваться самолётными углами α, β, γ , то среднеквадратичная ошибка $\mathcal{L}$ будет скалярной функцией четырёх переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma, n) = \sum_{k_1+k_2+k_3=3} \left(\frac{3}{20n^2} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^{k_1} y_i^{k_2} z_i^{k_3} - \frac{I_{k_1 k_2 k_3}}{mR^3} \right)^2. \quad (2)$$

Здесь $I_{k_1 k_2 k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dm$ – моменты распределения масс третьего порядка $k_1 + k_2 + k_3 = 3$; (x_i, y_i, z_i) – радиус-вектор i -й точки системы масс, отнесённый к R ; R – характерный размер тела $\mathcal{B}$, например, радиус шара, объём которого равен объёму тела $\mathcal{B}$.

Замечание 2. В работе [14] аналогичный подход успешно применяется для построения системы четырёх равных масс, равномоментной заданному телу и наилучшим образом приближающей его моменты распределения масс третьего порядка. В качестве примера рассматривается ядро кометы Чурюмова-Герасименко, относящееся к контактно-двойным малым небесным объектам [15]. Для него строится равномоментная система масс, наилучшим образом приближающая моменты третьего порядка. Настоящее исследование является обобщением подхода, предложенного в [14].

Пример: система материальных точек, равномоментная астероиду (1620) Географ. Поставленную задачу решим для астероида (1620) Географ численно с помощью метода роя частиц [16].

Полагая плотность вещества, составляющего астероид, постоянной, в качестве модели поверхности примем триангуляционную сетку, состоящую из 2048 вершин и 4092 граней, заданных в некоторой системе отсчёта $SXYZ$ [17]. Объём астероида равен объёму шара радиуса $R \approx 1284$ м. В главных центральных осях инерции астероида его ненулевые моменты распределения масс второго и третьего порядка приведены в табл. 1.

Табл. 1. Ненулевые моменты инерции второго и третьего порядка астероида (1620) Географ

Моменты инерции	Значения
Второго порядка	$I_{200} = 1.19044998, I_{020} = 0.17602691, I_{002} = 0.19064420$
Третьего порядка	$I_{300} = 0.23337628, I_{030} = -0.00510799, I_{003} = -0.00015975, I_{210} = 0.09371718, I_{201} = -0.02768747, I_{102} = -0.01566722, I_{120} = -0.01402806, I_{021} = 0.00455508, I_{012} = -0.00470748, I_{111} = -0.0025207554$

Рассмотрим два случая относительно n . При $n = \sqrt{5/3}$ масса точки, расположенной в центре масс тела, равна нулю, а массы каждой из оставшихся четырёх точек равны 0.25 от массы тела, т.е. имеет место равномоментная система четырёх одинаковых точечных масс, см. [14]. Удалось получить следующие значения углов $\alpha_* = 0.89810092$, $\beta_* = 4.945792938$, $\gamma_* = 2.52307242$, для которых $\mathcal{L}(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = 0.011084141455591114$. Этим углам отвечают следующие радиусы-векторы точек (см. табл. 2, 1 случай; рис. 1).

Табл. 2. Радиусы-векторы точек равномоментных систем

1 случай ($n = \sqrt{5/3}$)	2 случай ($n = n_*$)
(1.881817150, 0.0649265365, -0.0160347880)	(-0.1241506148, 0.3948329476, 0.1528411597)
(-0.4912547455, -0.4855798347, 0.5271784078)	(-0.07433998453, -0.2748119964, 0.3346479279)
(-0.6165379040, -0.2230495121, -0.6761480262)	(0.9880991934, -0.03722790737, -0.1918608502)
(-0.7740245010, 0.6437028103, 0.1650044064)	(-0.7896085939, -0.08279304388, -0.2956282374)

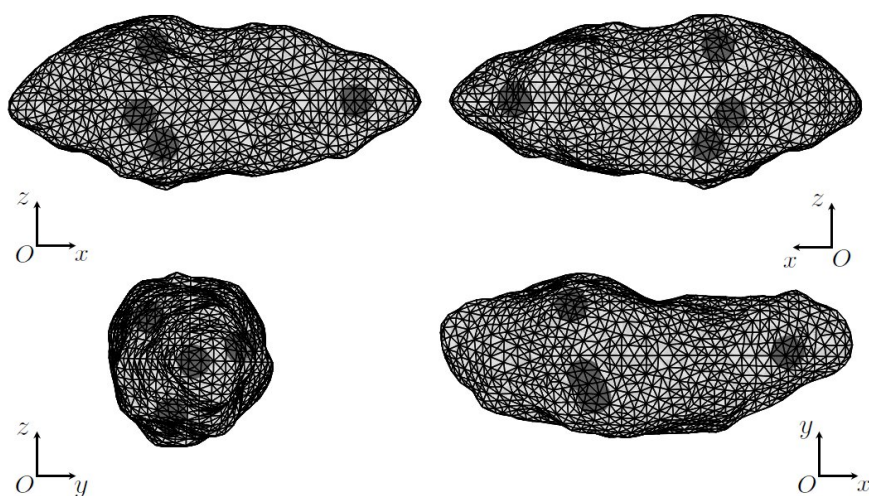


Рис. Модель астероида (1620) Географ и равномоментная ему система четырёх материальных точек равных масс в проекциях на координатные плоскости

В случае, когда величина n считается переменной, то удалось получить следующие значения $\alpha_* = 0.2139011$, $\beta_* = 0.10446578$, $\gamma_* = 0.74588571$, $n = 0.45190757$, для которых $\mathcal{L}(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*, n_*) = 0.0001141993974843669$. При этом масса точки, расположенной в начале координат, равна -1.938001531 от массы астероида, а массы четырёх оставшихся точек, отнесённые к массе астероида, равны по 0.7345003827 каждая, им отвечают следующие радиусы-векторы (см. табл. 2, 2 случай).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Пер. с англ. в 2-х томах. Т. I/ Под ред. Ю.А. Архангельского и В.Г. Дёмина. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. Franklin P. Equimomental systems // Studies in applied mathematics. – 1929. – Vol. 8 (1-4) – P. 129–140.
4. Sommerville D.M.Y. Equimomental tetrads of a rigid body // Edinburgh Mathematical Notes. – 1930. – Vol. 26. – P. 10–11.
5. Talbot A. Equimomental systems // The Mathematical Gazette. – 1952. – Vol. 36 (316). – P. 95–110.
6. Кондратьев Б.П. Теория потенциала: эквиравитирующие стержни для осесимметричных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001. – Т. 41. – № 2. – С. 269–281.
7. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. – М: Мир, 2007. – 512 с.

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

8. Кондратьев Б.П. Новые методы в теории потенциала // Письма в журнал Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2011. – Т. 8. – № 5. – С. 728–736.
9. Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука, 1991. – 216 с.
10. Dobrovolskis A.R. Inertia of Any Polyhedron // Icarus. – 1996. – Vol. 124 (2). – P. 698–704.
11. Буров А.А., Никонов В.И. Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Доклады РАН. Физика, технические науки. – 2020. – Т. 492. – № 1. С. 58–62.
12. Burov A.A., Nikonov V.I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2020. – Vol. 16 (2). – P. 259–273.
13. Буров А.А., Никонов В.И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – № 10. – С. 1764–1776.
14. Буров А.А., Никонова Е.А., Никонов В.И. О приближении поля притяжения твердого тела полем притяжения четверки материальных точек одинаковой массы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2024. – Т. 11. – № 2. – С. 385–394.
15. Lages J., Shevchenko I.I., Rollin G. Chaotic dynamics around cometary nuclei // Icarus. – 2018. – Vol. 307. – P. 391–399.
16. Poli R., Kennedy J., Blackwell T. Particle swarm optimization: an overview // Swarm Intelligence. – 2007. – Vol. 1. – P. 33–57.
17. Hudson R.S., Ostro S.J. Physical model of asteroid 1620 Geographos from radar and optical data // Icarus. – 1999. – Vol. 140. – P. 369–378.

АНАЛИЗ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.А. Палиенко, Е.В. Гайлит

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ palienko2.aa@edu.spbstu.ru

В статье рассматривается задача оптимизации управления запасами на предприятии с использованием метода динамического программирования. Предприятию необходимо покрыть известный спрос в течение пяти периодов при ограничениях на транспортировку и хранение. Основная цель — минимизация совокупных затрат на перевозку и хранение материалов. Построена математическая модель, учитывающая стоимость транспортировки, расходы на хранение и вместимость склада. Решение задачи реализовано в виде программы на языке Python, позволяющей определить оптимальный план поставок. Полученные результаты демонстрируют эффективность использования данной модели для принятия управленческих решений в сфере логистики и снабжения.

Для производства продукции любому предприятию, наряду с основными фондами, необходимы оборотные производственные фонды, включающие в свой состав [1]: производственные запасы (сырье, материалы и т.п.); остатки незавершенного производства; расходы будущих периодов.

Производственные запасы являются связующим звеном между затратами на производство продукции и её реализацией. С ростом объемов запасов увеличиваются общие затраты фирмы, включая затраты на перевозку и хранение. В этих условиях менеджер должен определить оптимальный размер партии заказа (Q_{opt}), при котором суммарные затраты минимальны.

Постановка задачи. Фирма планирует свою деятельность на 5 периодов, зная потребности в каждом из них: $a_1=30$ ед., $a_2=40$ ед., $a_3=30$ ед., $a_4=50$ ед., $a_5=40$ ед. Перевозка осуществляется транспортом грузоподъемностью 100 ед. Стоимость перевозки в каждом рейсе: $C_{тр} = 10 + 0,1x$ денежных единиц. Оставшийся на складе материал используется в последующих периодах, при этом его хранение стоит 0,2 денежных единиц за 1 единицу товара на период. Вместимость склада – 50 единиц. Первоначально склад пуст. Необходимо определить оптимальное количество материала, которое следует завозить в каждый период, чтобы минимизировать суммарные затраты на транспорт и хранение.

Формализация задачи. Оптимальные затраты Q_{opt} рассчитываются как сумма транспортных и складских расходов: $Q_{opt} = C_{xp} \times V_{i-1} + C_{тр} \times X_i$, где: V_{i-1} – остаток материала с предыдущего периода; C_{xp} – стоимость хранения; X_i – объем перевозимой продукции в периоде i ; $C_{тр}$ – стоимость транспортировки.

Для решения данной задачи применим метод динамического программирования. Согласно этому методу, весь процесс разворачивается с конца. С учетом потребностей пятого периода остаток материала не должен превышать 40 ед. Учитывая этот фактор, возможные решения для каждого периода анализируются с целью минимизации суммарных затрат [2].

Для начала определим оптимальные поставки в каждом периоде, обеспечивающие покрытие спроса и минимальные совокупные затраты.

Для решения данной задачи была написана программа на языке программирования Python.

Ниже, на рисунке 1, представлен код, пример работы программы при использовании исходных данных представлен на рисунке 2.

При выполнении данной программы мы получаем оптимальный план поставок, придерживаясь которого, мы снижаем затраты до минимальных возможных, при этом закрывая потребность каждого периода.

```

main.py x
1 periods = 5
2 demand = [30, 40, 30, 50, 40] # Потребность в каждом периоде
3 max_transport = 100 # Максимальный объем поставки за раз
4 storage_capacity = 50 # Вместимость склада
5 storage_cost = 0.2 # Стоимость хранения 1 ед. за 1 период
6 transport_cost = lambda x: 10 + 0.1 * x if x > 0 else 0 # Стоимость перевозки x ед.
7 dp = [[float('inf')] * (storage_capacity + 1) for _ in range(periods + 1)]
8 dp[0][0] = 0 # Начальное состояние: нулевые затраты при нулевом остатке
9 prev_state = [None] * (storage_capacity + 1) for _ in range(periods + 1)]
10 for i in range(periods):
11     for v in range(storage_capacity + 1): # Перебираем все возможные остатки
12         if dp[i][v] == float('inf'):
13             continue # Пропускаем недостижимые состояния
14         # Возможные объемы поставок x
15         for x in range(max(0, demand[i] - v), max_transport + 1):
16             new_v = v + x - demand[i] # Новый остаток после удовлетворения спроса
17             if new_v > storage_capacity:
18                 continue # Пропускаем, если превышает вместимость склада
19             cost = transport_cost(x) + storage_cost * v # Затраты в периоде
20             # Обновляем DP, если нашли более дешевый вариант
21             if dp[i + 1][new_v] > dp[i][v] + cost:
22                 dp[i + 1][new_v] = dp[i][v] + cost
23                 prev_state[i + 1][new_v] = (v, x) # Запоминаем переход
24 min_cost = min(dp[periods]) # Минимальные затраты в последнем периоде
25 v = dp[periods].index(min_cost) # Оптимальный остаток
26 x_plan = []
27 for t in range(periods, 0, -1):
28     v_prev, x = prev_state[t][v]
29     x_plan.append(x)
30     v = v_prev # Переход к предыдущему периоду
31 x_plan.reverse() # Разворачиваем порядок поставок
32 print("Оптимальный план поставок:", x_plan)
33 print("Минимальные суммарные затраты:", min_cost)

```

Рис. 1. Код программы

Оптимальный план поставок: [30, 70, 0, 90, 0]
Минимальные суммарные затраты: 63.0

Рис. 2. Результат работы программы.

С учётом полученных данных фирма может снизить затраты путём сокращения числа поставок и хранения части товара.

В данной статье, было использовано динамическое программирование. Был рассчитан оптимальный объем партии заказа, позволяющий минимизировать затраты на хранение и транспортировку продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайлит Е.В. Исследование операций и методы оптимизации. Элементы выпуклого и динамического программирования: учебное пособие. – СПб.: СПбГУПТД, 2021. – 71 с. – ISBN 978-5-7937-1883-7. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/118382.html> (дата обращения: 25.03.2025).
2. Гайлит Е.В. Методы оптимальных решений. Нелинейное программирование: учебное пособие. – СПб.: СПбГУПТД, 2021. – 64 с. – ISBN 978-5-7937-1885-1. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/118396.html> (дата обращения: 25.03.2025).

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОТОЧЕЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ В РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П.А. Поляков, П.Е. Бакаев, Н.А. Матвеев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ plasing555@gmail.com

Введение. В современной математической физике значительное внимание уделяется разработке эффективных методов приближённого решения нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в задачах с начальными условиями. Одним из перспективных подходов является использование аппроксимаций Паде, позволяющих существенно улучшить точность разложений по малым параметрам по сравнению с классическими рядами Тейлора. В данной статье исследуется применение одноточечных аппроксимаций Паде для анализа точных и асимптотических решений начальных задач, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядка в терминах задачи Коши с малыми параметрами. Уравнение первого порядка имеет вид

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

Уравнение второго порядка представляет осциллятор с малым параметром:

$$\ddot{u} + u = \varepsilon u^2; \quad u(0) = a; \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (2)$$

Задачи (1), (2) представлены в монографии Х. Найфе [1] как упражнения для самостоятельного решения. Рассмотрим уравнение (1), которое имеет точное решение $y = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1}$

(3)

Используем три члена прямого асимптотического разложения решения для малого ε и подставим его в (1)

$$(y'_0 + \varepsilon y'_1 + \varepsilon^2 y'_2) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) = \varepsilon (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2)^2$$

Для определения параметров разложения y_i рассмотрим уравнения при соответствующих степенях ε

$$1) \varepsilon^0: y_0^1 + y_0 = 0; \quad \frac{dy_0}{dx} = -y_0, \quad \frac{dy_0}{-y_0} = dx, \quad \ln |y_0| = -x + C \quad |y_0| = e^{-x+C}, \quad y_0 = Ce^{-x}.$$

$$\text{С условием } y(0) = 1: y_0 = e^{-x} \Rightarrow y'_0 = -e^{-x}$$

$$2) \varepsilon^1: y_1^1 + y_1 = y_0^2 = e^{-2x}; \quad y_1 = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + uv = e^{-2x}$$

$$v' = v; \quad \frac{dv}{v} = -dx, \quad v = e^{-x} \quad u'v = e^{-2x}; \quad u = -e^{-x} + C \quad y_1 = (-e^{-x} + C)e^{-x} = Ce^{-x} - e^{-2x}, \quad y'_1 = 2e^{-2x} - Ce^{-x}, \quad 2e^{-x} - Ce^{-x} - e^{-2x} + Ce^{-x} = e^{-2x}, \quad y_1 = -e^{-2x}$$

$$3) \varepsilon^2: y_2^1 + y_2 = 2y_1y_0 = -2e^{-3x}; \quad y_2 = uv, \quad v = e^{-x}, \quad u = e^{-2x} + C, \quad -2e^{-3x} - Ce^{-x} + e^{-3x} + Ce^{-x} = -2e^{-3x}, \quad y_2 = e^{-3x}$$

В результате получим

$$y = e^{-x} - \varepsilon e^{-2x} + \varepsilon^2 e^{-3x} = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1}$$

Покажем, что точным решением действительно является $y = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1}$.

$$\text{Найдем производную: } y' = \frac{-e^{-x}(1+\varepsilon e^{-x}-\varepsilon)-e^{-x}(-\varepsilon e^{-x})}{(1+\varepsilon e^{-x}-\varepsilon)^2} = \frac{-e^{-x}+\varepsilon e^{-x}}{(1+\varepsilon e^{-x}-\varepsilon)^2}$$

Подставляя в уравнение (1): $-e^{-x} + \varepsilon e^{-x} + e^{-x} (1 + \varepsilon e^{-x} - \varepsilon) = \varepsilon e^{-2x}$, получим тождество

$$0 = 0 \Rightarrow y = e^{-x} [1 + \varepsilon (e^{-x} - 1)]^{-1} \text{ является точным решением.}$$

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

Теперь приведём АП для этого уравнения. Конструируем $F[1,1] = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$, следуя методике [2,3]. С учетом разложения e^{-x} в ряд Тейлора запишем соотношение для определения коэффициентов $F[1,1]$:

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)(1 + b_1 x) = (a_0 + a_1 x) \left(1 - \varepsilon x + \frac{\varepsilon x^2}{2} - \frac{\varepsilon x^3}{6}\right)$$

$$x^0: a_0 = 1, x^1: b_1 - 1 = -\varepsilon + a_1, x^2: \frac{1}{2} - b_1 = -a_1 \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

Решив систему уравнений, получим:

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1 - \varepsilon}{2(\varepsilon - 1)}, b_1 = \frac{1 - \varepsilon}{2(\varepsilon - 1)} - \varepsilon + 1$$

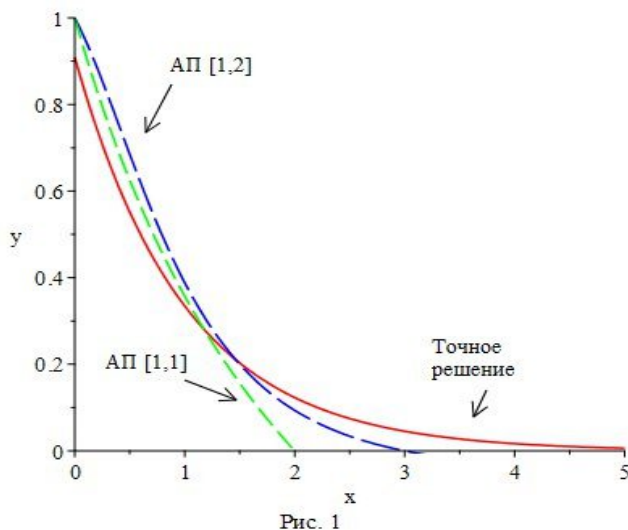


Рис.1 Сравнение точного решения с АП [1,1] и АП [2,2]

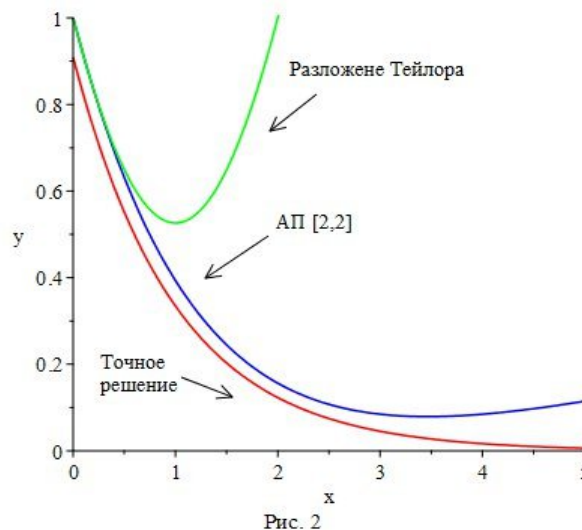


Рис.2 Сравнение точного решения с АП [2,2] и разложения Тейлора

Рассмотрим уравнение (2) и определим с точностью до первого порядка разложение решения:

$$u + \ddot{u} = \varepsilon u^2; u(0) = a; \dot{u}(0) = 0$$

$$\varepsilon = 0: \ddot{u} + u = 0, u_0 = a \cos(\varphi + t), \dot{u}(0) = -a \sin(\varphi + t), \ddot{u}_0 = -a \cos(\varphi + t)$$

$$\varepsilon \neq 0: u = u_0 + u_1 \varepsilon + u_2 \varepsilon^2, \dot{u} = \dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon^2 \dot{u}_2, \ddot{u} = \ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2$$

Подставляя разложения в (2), получим, сохраняя слагаемые со степенью не выше ε^2

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \varepsilon(\ddot{u}_1 + u_1) + \varepsilon^2(\ddot{u}_2 + u_2) = \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)^2 = \varepsilon(u_0^2 + 2u_0 u_1 \varepsilon)$$

Приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получим

$$\varepsilon^0: \ddot{u}_0 + u_0 = 0, \varepsilon^1: \ddot{u}_1 + u_1 = u_0^2, \varepsilon^2: \ddot{u}_2 + u_2 = 2u_0 u_1$$

Решив дифференциальные уравнения получим:

$$u_0(t) = a \cos(t)$$

$$u_1(t) = -\frac{a^2}{3} \cos(t) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos(2t)$$

В уравнении для u_2 будет генерироваться член вековой вида $t \sin(t)$ умноженный на константу. Это приведёт к росту слагаемого с увеличением времени t в решении. Поскольку есть член вида $t \sin(t)$, это разложение **не является равномерно пригодным** для больших t . Возрастание решения делает недействительным предположение о том, что εu_1 и

$\varepsilon^2 u_2$ малы по сравнению с u_0 для больших t . Это означает, что наше приближение будет равномерно пригодным только для относительно небольших значений t .

Решение с точностью до первого порядка:

$$u(t) = a \cos(t) + \varepsilon \left(-\frac{a^2}{3} \cos(t) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos(2t) \right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. — 455 с.
2. Baker G.A. Jr. Essentials of Padé Approximants. — New York: Academic Press, 1975. — 502 p.
3. Shatrov A.V. Using of Pade Approximation for Solving Mixed Problems of Mathematical Physics // Functional Differential Equations. — 2022. — Vol. 29. — № 3-4. — P.205-209
doi: <https://doi.org/10.26351/FDE/29/3-4/7>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА СИМУЛЯЦИИ BRIAN ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОСНОВНОГО РИТМА ЛИМБИЧЕСКОЙ ЭПИЛЕПСИИ НА ОСНОВЕ НЕЙРОНОВ ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ

М.А. Сусоров¹, М.В. Корнилов², И.В. Сусоев¹

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

✉ susorov_ma@spbstu.ru

Эпилепсия — комплекс различной природы функциональных нарушений, приводящих к сбоям в нормальной работе мозга. Общим местом всех форм эпилепсии является генерация относительно синхронной, высокоамплитудной патологической электромагнитной активности нейронами одной или нескольких систем мозга, например, таламокортикальной или лимбической. Моделирование различных типов эпилепсии порождает множество отдельных задач [1,2] в рамках теории динамических систем, в связи с тем, что формы эпилепсии различаются как областями активности, так и сценариями возникновения и развития [3].

Отдельный интерес представляет применимость систем симуляции, как первого шага к натурному моделированию для подобного рода задач. В частности в данной работе используется Brian [4] — пакет Python с открытым исходным кодом для разработки симуляций сетей нейронных спайков. Он позволяет оперировать сразу дифференциальными уравнения для создания групп нейронов, обеспечивая связи между ними посредством синапсов.

Ранее в [5] было показано, что генератор эпилептиформной активности может быть реализован в виде кольца нейронов, каждый из которых находится в подпороговом неколебательном режиме, а итоговая активность есть функция связей и времени запаздывания в синапсе: возбуждённый внешним входом импульс последовательно пробегает по всем клеткам кольца и снова возбуждает первый нейрон и т. д. Поэтому в рамках данной работы была использована классическая модель Ходжкина-Хаксли [6]. При этом было использовано небольшое число нейронов однонаправленно связанных в кольцо (пример архитектуры связей приведён на рис. 1). Уравнение для i -го осциллятора определялось следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \frac{1}{C_m} (g_{Na} m^3 h (V_i - V_{Na}) + g_K n^4 (V_i - V_K) + g_L (V_i - V_L) + I_{syn}), \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m, \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h, \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $C_m = 1 \text{ мкФ/см}^2$ — мембранная ёмкость, $g_{Na} = 120 \text{ мСм/см}^2$ — проводимость натриевых каналов, $g_K = 36 \text{ мСм/см}^2$ — проводимость калиевых каналов, $g_L = 0.3 \text{ мСм/см}^2$ — проводимость утечки, а $V_{Na} = -115 \text{ мВ}$, $V_K = 12 \text{ мВ}$, $V_L = -10.613 \text{ мВ}$ — равновесный потенциал для натриевых, калиевых токов и токов утечки соответственно, а I_{syn} — синаптический ток, поступающий в рассматриваемый нейрон при испускании импульса пресинаптическим нейроном, m , h — воротные переменные натриевого канала, n — воротная переменная, константы переходов.

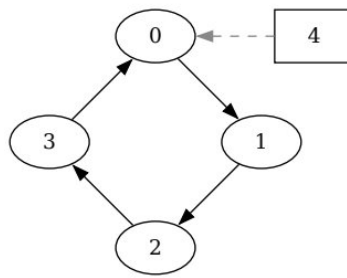


Рис.1. Структура рассматриваемой сети нейронов. Овалами обозначены нейроны Ходжкина-Хаксли, прямоугольником — спайк-генератор

Функции открытия и закрытия воротных переменных (переходов) α и β — задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{0.1(V_i+25)}{\exp\left(\frac{V_i+25}{10}\right)-1}, & \alpha_h &= 0.07 \exp\left(\frac{V_i}{20}\right), & \alpha_n &= \frac{0.01(V_i+10)}{\exp\left(\frac{V_i+10}{10}\right)-1}, \\ \beta_m &= 4 \cdot \exp\left(\frac{V_i}{18}\right), & \beta_h &= \frac{1}{\exp\left(\frac{V_i+30}{10}\right)+1}, & \beta_n &= 0.125 \cdot \exp\left(\frac{V_i}{80}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

По аналогии с работой [7] параметры нейронов подбирались таким образом, чтобы они демонстрировали подпороговое поведение — таким образом для возникновения динамики в систему необходимо было подать сторонний импульс, который воздействовал на нейрон под номером 0 через 200 мс после начала симуляции, что представлено на рис. 2. Из графиков видно, что после подачи спайка в системе возникает устойчивый импульс, который проходит по всем элементам кольца.

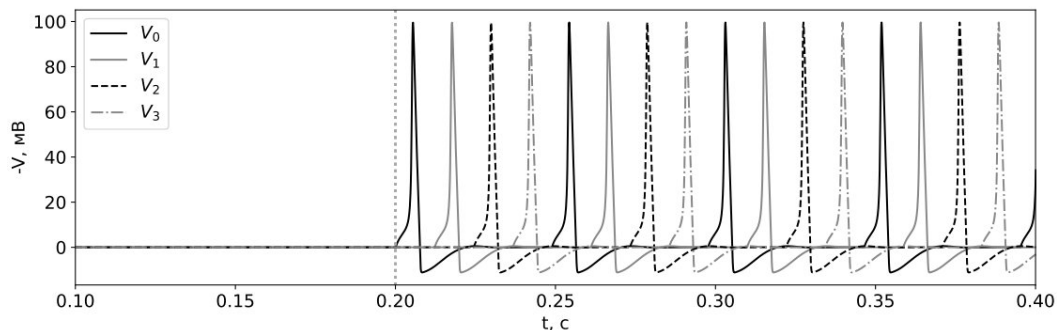


Рис. 2. Временные реализации 4х нейронов Ходжкина-Хаксли связанных однонаправленной связью в кольцо, вертикальными серыми точками отмечен момент подачи импульса со спайк генератора на нейрон под номером 0

Пакет симуляции Brian позволяет гибко настраивать синаптические связи между нейронами, в частности, управлять временем запаздывания в связях, а также масштабировать модель для различного числа нейронов. Таким образом, используя в качестве варьируемого параметра время запаздывания τ в синаптической связи, удалось изменять в некотором диапазоне частоту импульса в кольце. Зависимость данной величины представлена на рис. 3. Из графика видно, что с увеличением времени запаздывания существенно уменьшается частота сигнала. При этом увеличение количества нейронов в кольце также ведёт к уменьшению частоты сигнала. Данные результаты согласуются с ранее полученными, что говорит о том, что использование пакета симуляции Brian целесообразно. В дальнейшем

планируется оценить устойчивость системы при расстройке нейронов по параметрам, а также рассмотреть модели воспроизводящих все основные токи в пирамидах поля СА3 гиппокампа, как например [8].

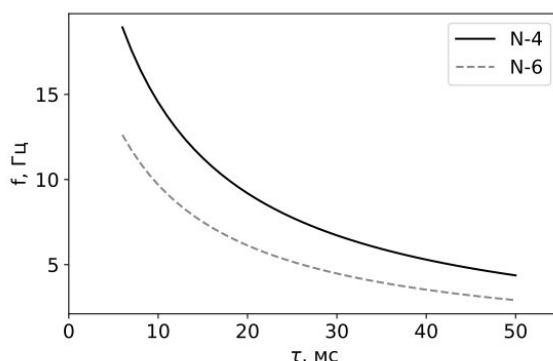


Рис. 3. Зависимость частоты колебаний нейронов в кольце от времени задержки в синаптической связи при числе нейронов в кольце равным 4 — чёрным цветом и 6 — серым пунктиром

Математическое моделирование сигналов мозга при лимбической (височной) эпилепсии — сложная задача в первую очередь потому, что сами по себе эти сигналы могут быть очень различны. Поэтому в экспериментах необходимо рассматривать различные способы построения моделей. Использование же различных пакетов симуляции позволяет сократить время разработки, отладки и тестирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 25-22-00406.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jefferys J.G.; Jiruska P.; De Curtis M.; Avoli M. Limbic network synchronization and temporal lobe epilepsy. Jasper's Basic Epilepsies [Internet]. 4th edition 2012.
2. Jiruska P., de Curtis M., Jefferys J.G., Schevon C.A., Schiff S.J., Schindler K. Synchronization and desynchronization in epilepsy: hypotheses // The Journal of physiology. 2013, 591, 787–797. DOI: 10.1113/jphysiol.2012.239590.
3. Scheffer I. E., Berkovic S., Capovilla G., Connolly M. B., French J., Guilhoto L., Hirsch E., Jain S., Mathern G. W., Moshé S. L., Nordli D. R., Perucca E., Tomson T., Wiebe S., Zhang Y.-H., Zuberi S. M. ILAE classification of the epilepsies: Position paper of the ILAE Commission for Classification and Terminology // Epilepsia. 2017. Vol. 58, no. 4. P. 512–521. DOI: 10.1111/epi.13709.
4. Goodman, Dan F., Brette, Romain The Brian simulator // Frontiers in Neuroscience. 2009, V.3 P.1662-453X. DOI: 10.3389/neuro.01.026.2009
5. Kornilov M.V., Sysoev I.V. Mathematical model of a main rhythm in limbic seizures // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 5. P. 1233. DOI: 10.3390/math11051233
6. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // The Journal Of Physiology. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500-544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764
7. Корнилов М.В., Капустников А.А., Созонов Е.А., Сысоева М.В., Сысоев И.В. Режимы синхронизации в кольце нейронов гиппокампа грызунов при лимбической эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, вып. 3. С. 357-375. DOI: 10.18500/0869-6632-003113
8. Yoshida M., Hayashi H. Emergence of sequence sensitivity in a hippocampal CA3–CA1 model // Neural Networks. 2007. Vol. 20, no. 6. P. 653–667. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.05.003

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА НЕЙРОНОВ ДЛЯ РАСЧЁТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕФТЯНОГО ПЯТНА

В.Д. Тарасов, Д.А. Тархов, А.В. Шатров
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ Tarasovvd853@gmail.com

Введение. Нефтяные разливы могут привести к катастрофическим последствиям для экосистем, поэтому нужно разработать достаточно точный метод их прогнозирования. Распространение нефтяного пятна в водной среде представляет собой сложный процесс, который проблематично смоделировать. Одним из методов построения его модели является использование нейронных сетей. В данном докладе рассматривается нахождение оптимального количества нейронов для прогноза массы нефти, оставшейся на поверхности воды.

Цель работы - определить оптимальное количество нейронов для решения задачи прогнозирования массы нефти, оставшейся на поверхности воды. Для этого используются данные о разливах нефти, включая параметры внешней среды.

Рассматривается двумерная область $\Omega(x,y)$ с границей $d\Omega$. Нефть или нефтепродукт занимает подобласть $\Omega' \in \Omega$. В подобласти $\Omega' \in \Omega'$ действует источник, обеспечивая поток нефтепродуктов $-Q_0$ на поверхность моря. Область $\Omega(x,y)$ ограничена кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей береговой контур. Основные уравнения модели для области Ω' представляются в следующем виде:

$$h \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla \vec{u}) \right) = -g' H \nabla H - \beta |(\vec{u} - (\vec{u}_d + \vec{u}_e))| (\vec{u} - (\vec{u}_d + \vec{u}_e)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla (H \vec{u}) = - \frac{Q_e + Q_{n-d} + Q_{ch-d} - Q_0 + Q_{sc}}{\rho_0} \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность нефти; u — вертикально осредненная скорость движения нефти; u_d — скорость поверхностного дрейфового течения, задаваемая параметрически; u_e — скорость течения неветрового происхождения; H — толщина нефти; β — коэффициент трения; Q_e — поток массы за счёт испарения; Q_{n-d} — поток массы за счёт естественного диспергирования; Q_{ch-d} — поток массы за счёт химического диспергирования;

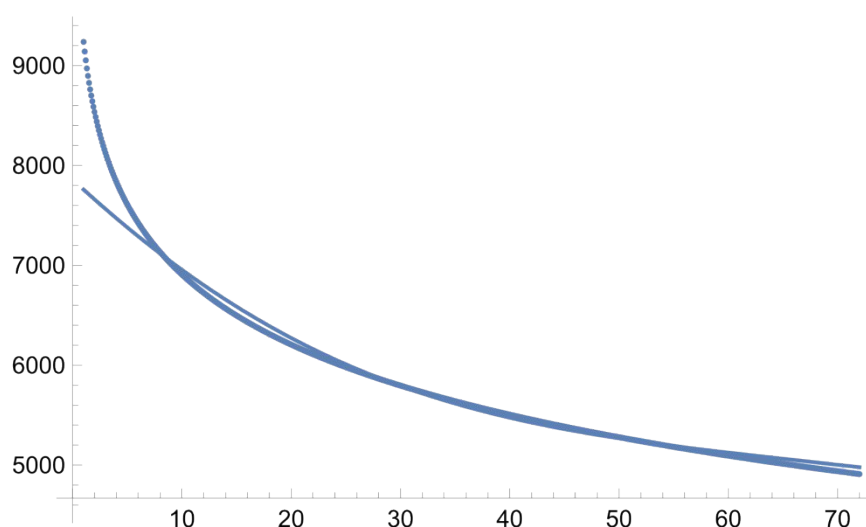


Рис. 1. Выход нейронной сети и исходная выборка для сети из 4 нейронов и обучающей выборке первые 800 точек (до времени 60)

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

Для определения оптимального количества нейронов при различном количестве исследуемых точек были построены графики зависимости среднеквадратичной ошибки прогноза от количества нейронов.

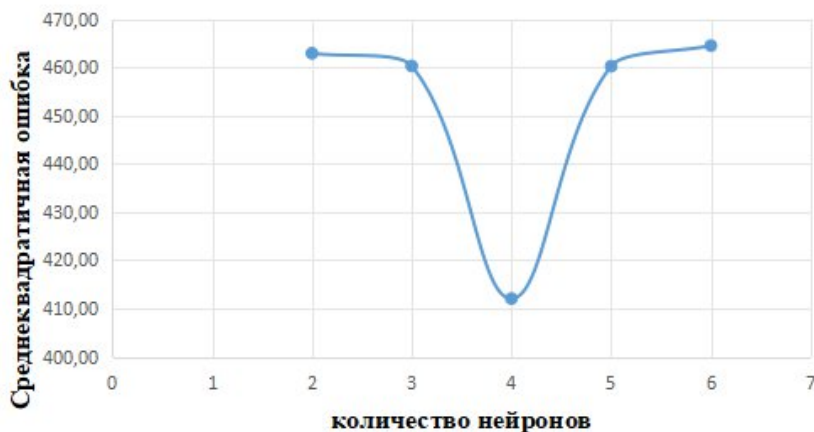


Рис. 2. График зависимости среднеквадратичной ошибки от количества нейронов для 300 точек

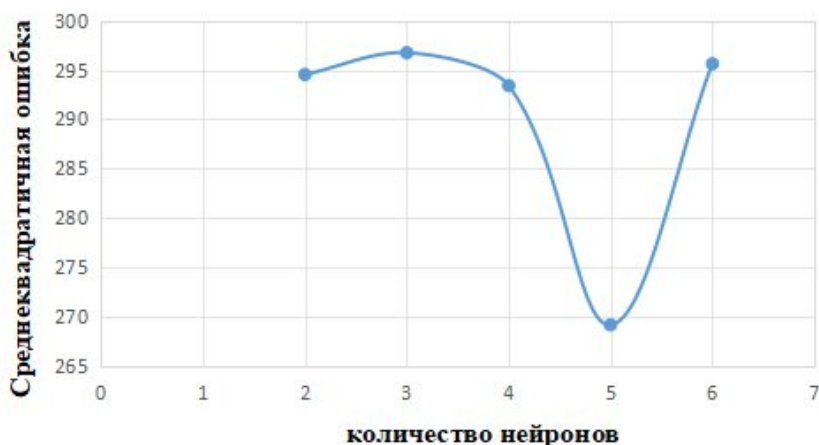
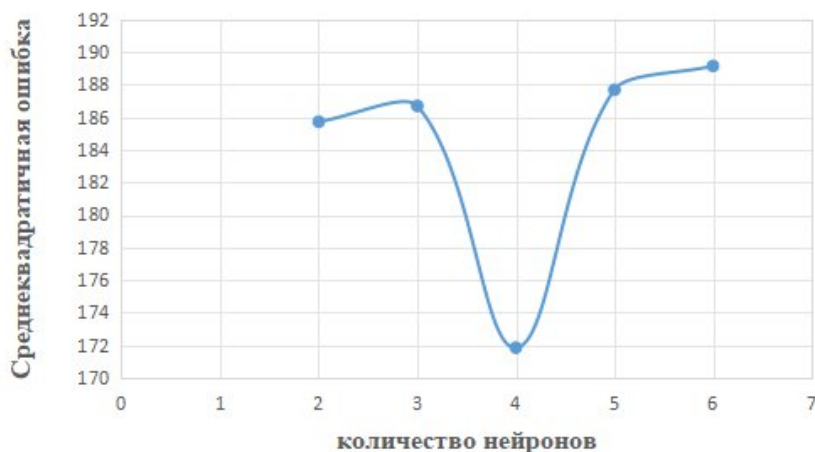


Рис. 3. График зависимости среднеквадратичной ошибки от количества нейронов для 400 точек

Графики, показывающие зависимость среднеквадратичной ошибки от количества нейронов, подтверждают наличие U - образной зависимости. Эксперименты показали, что при увеличении количества нейронов среднеквадратичная ошибка уменьшается до определённого момента. Однако после достижения определённого числа нейронов ошибка наоборот увеличивается.



Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

Рис. 4. График зависимости среднеквадратичной ошибки от количества нейронов для 500 точек

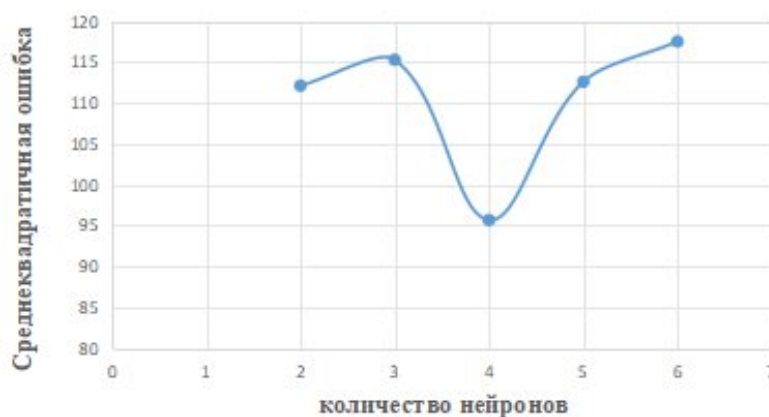


Рис. 5. График зависимости среднеквадратичной ошибки от количества нейронов для 600 точек

Выводы. На графиках видна U - образная зависимость - это может говорить о том, что после некоторого количества нейронов наблюдается эффект переобучения. Результаты определения оптимального количества нейронов для расчёта распространения нефтяного пятна: для 300 точек - 4, для 400 точек - 5, для 500 точек - 4, для 600 точек – 4. В дальнейшем для уточнения модели предполагается использовать методы работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.А.Тархов. Нейронные сети. Модели и алгоритмы. М., Радиотехника, 2005. 256с.
2. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере.- Новосибирск: Наука, 1996. 276с
3. Tarkhov, D.; Vasilyev, A. Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development; Academic Press: Cambridge, MA, USA, 2020.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В АЛГОРИТМЕ ТРАССИРОВКИ ЛУЧЕЙ

А.А. Усиков, М.В. Лагунова

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

✉ usikov.aa@edu.spbstu.ru

Трассировка лучей – это алгоритм, который имитирует поведение света, создавая фотореалистичное изображение. Принцип работы основан на испускании лучей из камеры, их пересечении с объектами сцены и вычислении освещения сцены.

Для определения понятия «луч» достаточно ввести два вектора: радиус-вектор точки, из которой выходит луч, и вектор его направления, который в данном алгоритме будем нормализовать. Тогда уравнение точки на луче выглядит так: $\vec{P}(t) = \vec{O} + \vec{D} \cdot t$, где $\vec{P}$ – радиус-вектор точки на луче, $\vec{O}$ – радиус-вектор точки, из которой выходит луч, и $\vec{D}$ – нормализованное направление луча. В дальнейшем, выражение «координаты луча» будет обозначать координаты вектора $\vec{P}(t)$, а координаты векторов $\vec{O}$ и $\vec{D}$ будут обозначаться так: Ox, Oy, Oz, Dx, Dy, Dz .

Говоря простым языком, алгоритм выглядит так: для каждой точки экрана строится луч, ищется его пересечение с объектами сцены, учитываются источники света, и возвращается цвет пикселя в данной точке. Для того чтобы построить луч в каждой точке экрана, необходимо учитывать параметры сценической камеры и размеры экрана [1].

Поговорим о пересечениях с объектами. Как известно, в трехмерном пространстве геометрические фигуры могут быть представлены в виде уравнения $F(x, y, z) = 0$. Подставив в это уравнение координаты вышеупомянутого вектора $\vec{P}(t)$, получим уравнение относительно t , которое необходимо решить с условием, что $t > 0$.

Простейшей фигурой в трехмерном пространстве является плоскость с уравнением $F(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты луча, получаем уравнение $A \cdot (Ox + Dx \cdot t) + B \cdot (Oy + Dy \cdot t) + C \cdot (Oz + Dz \cdot t) + D = 0$. Приведем подобные слагаемые и выразив произведения компонент через скалярные произведения векторов, получим формулу для t : $t = \frac{-(\vec{N} \cdot \vec{O} + D)}{\vec{N} \cdot \vec{D}}$, где $\vec{N} = (A, B, C)$. Несколько сложнее находится пересечение луча и треугольника. Точка пересечения луча и треугольника совпадает со случаем плоскости, однако надо еще проверить, что точка принадлежит треугольнику. Треугольник задается радиус-векторами трех точек: $\vec{P}_0, \vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Проведем векторы от точки P_0 к точкам P, P_1, P_2 . Они обозначаются так: $\vec{r} = \vec{P} - \vec{P}_0, \vec{s}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_0, \vec{s}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_0$. Разложим вектор $\vec{r}$ по двум другим векторам: $\vec{r} = \vec{s}_1 \cdot u + \vec{s}_2 \cdot v$. Координаты разложения зависят от начальных условий (то есть заданных точек треугольника), а условие принадлежности точки треугольнику выглядит так: $u \geq 0 \ \& \ v \geq 0 \ \& \ u + v \leq 1$.

Последней фигурой, которая будет рассматриваться в данной работе, является сфера. В ее случае проще решить задачу геометрически. Возможны два варианта расположения начальной точки луча и сферы: либо внутри, либо снаружи. В первом случае луч в любом случае пересечет сферу, во втором случае можно обратиться к рис.1. По построению: $OK = \vec{OC} \cdot \vec{D}$. В случае, если $OK < 0$, сфера находится «за лучом», и пересечения нет. Найдем $CK^2 = OC^2 - OK^2$ и определим знак выражения $R^2 - CK^2$. Если он отрицательный, то луч не пересекается со сферой, в ином случае луч пересекается со сферой и точка пересечения находится как $t = OK - \sqrt{R^2 - CK^2}$, где R – радиус сферы. Немного затронем тему освещения. Воспользуемся моделью Блинна-Фонга с коэффициентами фонового, диффузного, отраженного света, а также коэффициентом Фонга. Все параметры задаются заранее и для каждого есть свои правила наложения, рассматриваемые далее.

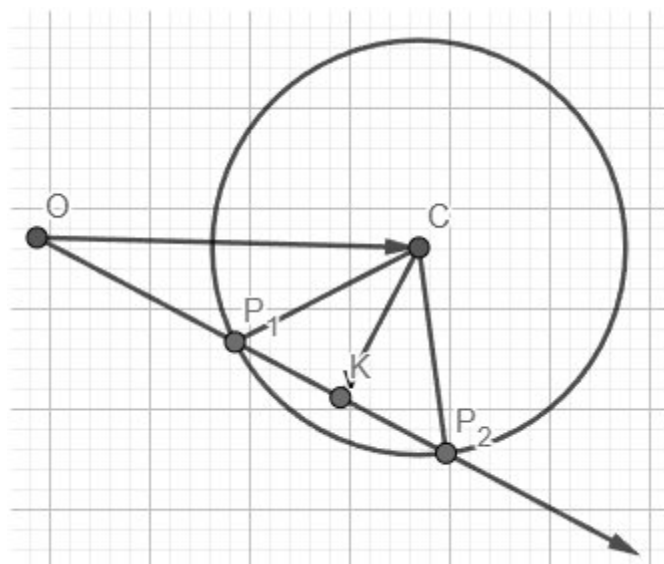


Рис. 1. Луч «протыкает» сферу, двумерная проекция

Фоновое освещение просто служит дополнительным слагаемым в сумме света, поэтому накладывается аддитивно.

Диффузное освещение прямо пропорционально скалярному произведению направления источника света и нормали к поверхности в точке пересечения [2]. Здесь учитываются тени: от точки пересечения в сторону источника света запускается второй луч, и если было найдено пересечение его с объектом, то точка пересечения находится в тени.

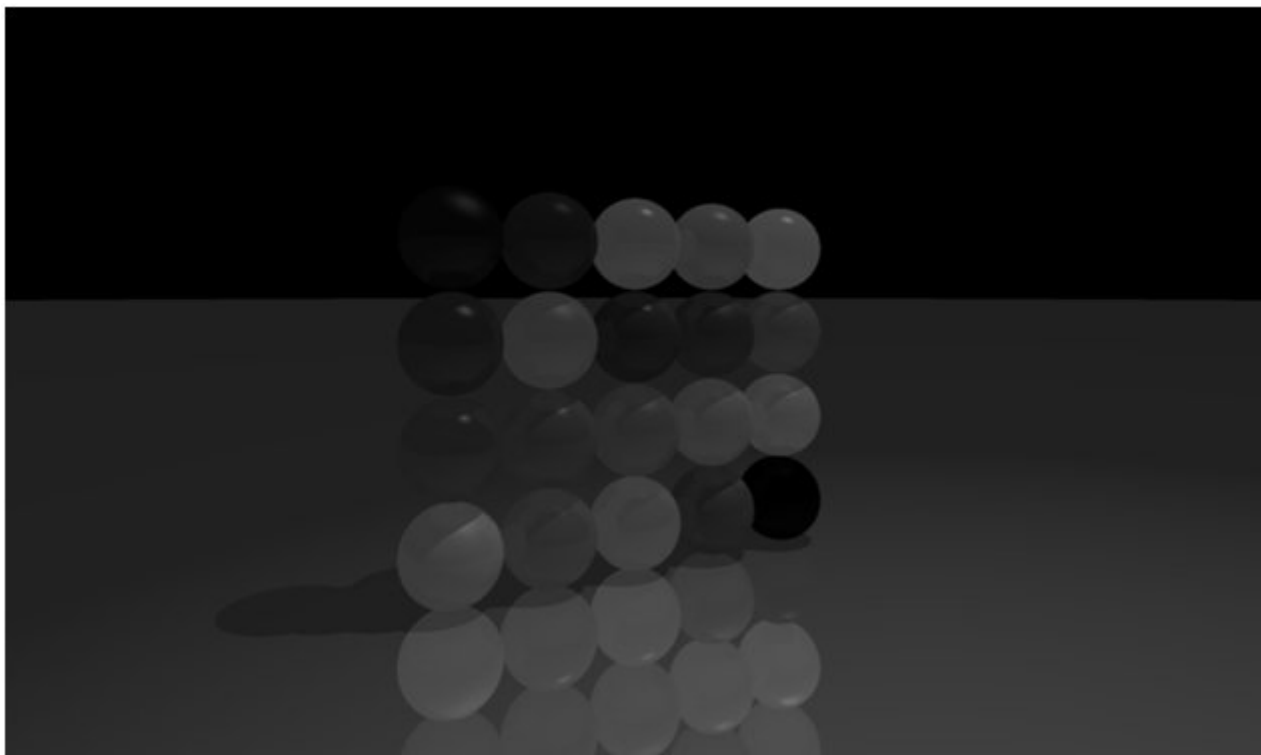


Рис. 2. Примеры материалов с разными коэффициентами освещения

Отраженное освещение, как следует из названия, зависит от отраженного вектора луча к поверхности: $\vec{R} = \vec{D} - \vec{N} \cdot (2 \cdot \vec{D} \cdot \vec{N})$. Принцип его наложения схож с принципом наложения диффузного освещения, с той лишь разницей, что скалярное произведение отраженного

вектора и направления источника света возводится в степень, равную коэффициенту Фонга [2]. Примеры разных материалов с разными коэффициентами освещения можно наблюдать на рис.2.

Наличие отраженного вектора позволяет ввести коэффициент отражения и запустить еще один луч от поверхности с направлением, равным отраженному вектору. Более того, можно вспомнить о наличии отражения, ввести коэффициент прозрачности материала и запустить очередной луч в сторону преломленного вектора, который считается по законам оптики.

В завершение поговорим о текстурировании объектов. Текстура представляет из себя картинку с известной высотой и шириной, которая накладывается вместе с диффузным освещением. Чтобы понять, какой именно пиксель в текстуре надо наложить на объект, используются текстурные координаты. Для плоскости никаких преобразований делать не надо и текстурные координаты можно взять равными обычным, взяв остаток от деления на высоту и ширину, чтобы не выйти за пределы изображения. Для сферы достаточно перейти от прямоугольной системы координат к сферической и обратно, тогда пара текстурных координат (u, v) будет выглядеть так: $\phi = \text{atan}\left(\frac{P_z}{P_x}\right)$, $\theta = \text{acos}\left(\frac{P_y}{R}\right)$, $(u, v) = \left(\frac{-\phi + \pi}{2\pi}, \frac{\theta}{\pi}\right)$ [3]. Для треугольника в этой работе берутся готовые текстурные координаты из файла модели.

Пример сцены, на которой есть пример для всего вышесказанного, приведен на рис.3.

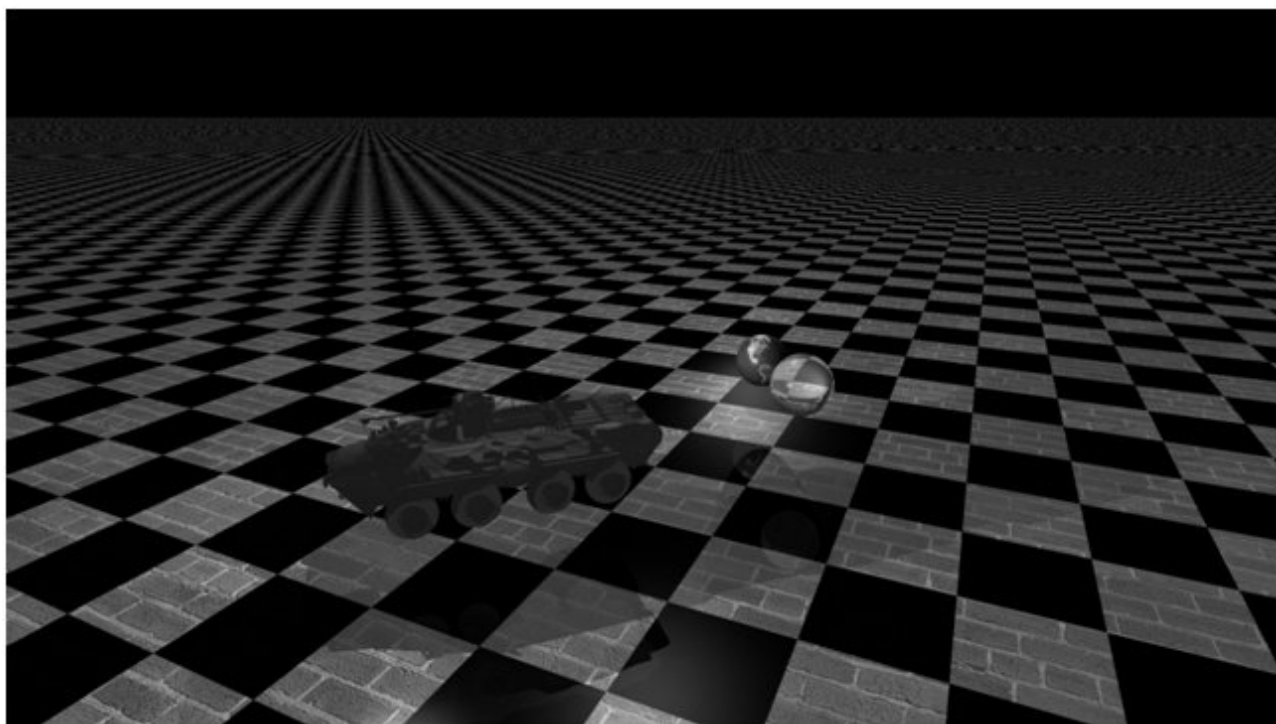


Рис. 3 Комплексная сцена с множеством примеров

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrew S. Glassner (ed.), Eric Haines, Pat Hanrahan, Robert L. Cook, James Arvo, David Kirk, Paul S. Heckbert, «An Introduction to Ray Tracing», Academic Press, 1989.
2. Matt Pharr, Wenzel Jakob, Greg Humphreys, «Physically Based Rendering: from Theory to implementation», 3 edition, Morgan Kaufmann, 2016.
3. David S. Ebert, F. Kenton Musgrave, Darwyn Peachey, Ken Perlin, Steve Worley, «Texturing and modeling, Third Edition: A Procedural Approach», Morgan Kaufmann, 2002.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Варенникова, А.В. Баландюк, С.П. Преображенский
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 ✉ varennikova.mv@gmail.com

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - k^2 q(x)y = 0$ на конечном отрезке $[a; b]$, где $k > 0$, функция $q(x)$ вещественна, строго положительна и бесконечно дифференцируема на $[a; b]$. Эти уравнения в конечном виде, вообще говоря, не интегрируются, потому что их можно свести к уравнению Риккати. А такие уравнения редко когда интегрируются в конечном виде. Решения сами не находятся, зато находится их асимптотика при $k \rightarrow +\infty$, что важно для физических задач.

Рассматривается асимптотика решений при больших значениях аргумента для осциллирующих решений и для неосциллирующих решений. Иногда нахождение асимптотики приводит к нахождению решения. Соответствующий пример рассматривается в докладе. Такого рода задачи возникают в различных физических задачах, в частности, в задачах о распространении звуковых, электромагнитных, упругих волн и в квантовой механике.

Эвристические соображения. Если q – постоянная, то уравнение имеет два линейно независимых решения $y_{1,2} = e^{\pm k\sqrt{q}x}$. Будем искать решение в виде экспоненты, умноженной на ряд по степеням $1/k$:

$y = e^{kS(x)} \left[a_0(x) + \frac{1}{k} a_1(x) + \dots + \frac{1}{k^n} a_n(x) + \dots \right]$. При вычислениях удобнее искать y в виде:

$$y = \exp \left[\int_{x_0}^x \left(k\alpha_{-1}(t) + \alpha_0(t) + \frac{1}{k} \alpha_1(t) + \dots + \frac{1}{k^n} \alpha_n(t) + \dots \right) dt \right].$$

Если выполнить подстановку $y'/y = \omega$, тогда $y'' = y(\omega^2 + \omega')$ и для ω получится уравнение Риккати $\omega' + \omega = k^2 q(x)$, где $\omega = k\alpha_{-1}(x) + \alpha_0(x) + \frac{1}{k} \alpha_1(x) + \dots + \frac{1}{k^n} \alpha_n(x) + \dots$.

Подставляя выражение для ω в уравнение Риккати и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях k , получаем: $\alpha_{-1}^2(x) = q(x)$, $2\alpha_{-1}(x)\alpha_0(x) + \alpha_{-1}'(x) = 0$, ...

Откуда $\alpha_{-1}(x) = \pm \sqrt{q(x)}$, $\alpha_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}$, ..., и можно затем найти $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ...

Учитывая, что $S(x) = \pm \int \sqrt{q(t)} dt$, $\exp \left[-\int \frac{q'(t)}{4q(t)} dt \right] = C \exp \left[-\frac{1}{4} \ln q(x) \right] = C(q(x))^{-1/4}$,

получаем, с точностью до $O(k^{-1})$, два приближённых решения

$$y_{1,2}(x) \approx q^{-1/4}(x) \cdot \exp \left[\pm k \int \sqrt{q(t)} dt \right] (k \rightarrow +\infty).$$

Выпишем ещё $\alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{q''(x)}{(q(x))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(q'(x))^2}{(q(x))^{5/2}}$, отвечающее выбору $+\sqrt{q}$ в экспоненте.

Осциллирующие решения. Рассмотрим уравнение $y'' + Q(x)y = 0, x \geq 0$ (1)

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия: 1⁰. $Q(x) > 0$ при $x \geq x_0 \geq 0$; 2⁰. $Q''(x)$ непрерывна при $x \geq 0$; 3⁰. $\int_0^\infty |\alpha_1(x)| dx < \infty$, где $\alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{Q''(x)}{(Q(x))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(x))^2}{(Q(x))^{5/2}}$.

Тогда уравнение (1) имеет решения $y_1(x), y_2(x)$ вида $y_{1,2}(x) = Q^{-1/4}(x) \cdot \exp\left\{\pm i \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt\right\} (1 + \varepsilon_{1,2}(x))$, $|\varepsilon_j(x)| \leq C \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt, j = 1, 2, C$ – постоянная.

Вместо $y_{1,2}(x)$ можно взять вещественные решения $y_{3,4}(x)$:

$$y_3(x) = Q^{-1/4}(x) \cdot \left[\cos \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right], y_4(x) = Q^{-1/4}(x) \cdot \left[\sin \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right], x \rightarrow \infty.$$

Полученные асимптотические формулы показывают, что все решения уравнения (1) осциллируют при больших x .

Пример 1. Уравнение Эйри $y'' - xy = 0$ имеет решения такие, что при $x \rightarrow -\infty$

$$y_1(x) = |x|^{-1/4} \cdot \left[\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right], y_2(x) = |x|^{-1/4} \cdot \left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right].$$

Действительно, после замены переменной $x = -t$ получаем уравнение $y''_t + ty = 0$, так что

$$Q(t) = t, \int_0^t \sqrt{Q(\tau)} d\tau = \frac{2}{3} t^{3/2}, \int_t^\infty |\alpha_1(\tau)| d\tau = Ct^{-3/2}.$$

Пример 2. Приведенное уравнение Бесселя $z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right)z = 0$

имеет решения такие, что при $x \rightarrow +\infty$ $z_1(x) = \cos x + O(x^{-1})$, $z_2(x) = \sin x + O(x^{-1})$. Действительно, в этом случае $Q(x) = 1 - (\nu^2 - 1/4)x^{-2}$, $Q^{-1/4}(x) = 1 + O(x^{-2})$,

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt = x - x_0 + \int_{x_0}^x \left(\sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}} - 1 \right) dt + \int_{x_0}^\infty \left(\sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}} - 1 \right) dt.$$

Следовательно, $S(x_0, x) = x + C - (\nu^2 - 1/4) \int_{x_0}^x t^{-2} \left(1 + \sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}} \right)^{-1} dt = x + C + O(x^{-1})$,

($x \rightarrow +\infty$), и из этих оценок и следуют асимптотические формулы.

Неосциллирующие решения. Рассмотрим уравнение $y'' - Q(x)y = 0$ (2)

ТЕОРЕМА 2. Пусть условия 1⁰ – 3⁰ теоремы 1 выполнены. Тогда уравнение (2) имеет

решения $y_1(x), y_2(x)$ вида $y_{1,2}(x) = Q^{-1/4}(x) \cdot \exp\left\{\pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt\right\} (1 + \varepsilon_{1,2}(x))$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_j(x) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Пример 3. Уравнение Эйри $y'' - xy = 0$ имеет решения такие, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_3(x) = x^{-1/4} \cdot \exp\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] \left[1 + O(x^{-3/2})\right], \quad y_4(x) = x^{-1/4} \cdot \exp\left[-\frac{2}{3}x^{3/2}\right] \left[1 + O(x^{-3/2})\right].$$

Решение, отличное от $y_4(x)$ лишь постоянным множителем, а именно, $\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y_4(x)$,

называется функцией Эйри и играет важную роль в задачах распространения волн. Из примера 1 следует, что функция Эйри должна сильно осциллировать при $x < 0$. Её точная асимптотика такова: $\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cdot \left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right] (x \rightarrow -\infty)$.

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cdot \left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right] (x \rightarrow -\infty).$$

Функция Эйри описывает переходные процессы (типа перехода от света к тени), так как она осциллирует на полуоси $x < 0$ и экспоненциально убывает на полуоси $x > 0$. Её свойства хорошо изучены.

Нахождение асимптотик конкретного уравнения. Рассмотрим уравнение $xy'' + 2(2x^2 + 1)y' + 4xy = 0$. Замена $y = a(x) \cdot z(x)$ приводит это уравнение к двучленному, если приравнять коэффициент при $z'(x)$ к нулю: $2xa'(x) + 2(2x^2 + 1)a(x) = 0$.

Разделяя переменные, находим $a(x) = \frac{1}{x} e^{-x^2}$. Получаем уравнение вида (2):

$$z''(x) - (2 + 4x^2)z(x) = 0. \quad \text{У этого уравнения } Q(x) = 2 + 4x^2, \quad Q'(x) = 8x, \quad Q''(x) = 8.$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{Q''(x)}{(Q(x))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(x))^2}{(Q(x))^{5/2}} = \frac{1}{(2 + 4x^2)^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(8x)^2}{(2 + 4x^2)^{5/2}}. \quad \text{Т.о.} \quad |\alpha_1(x)| \sim \frac{\text{const}}{x^3} \quad \text{при}$$

$x \rightarrow +\infty$. Это позволяет заключить, что $\int_{x_0}^{\infty} |\alpha_1(x)| dx$ сходится. Исходя из теоремы 2, напомним:

$$z_{1,2}(x) = Q^{-1/4}(x) \cdot \exp\left\{\pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt\right\} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2}(x) &\sim x^{-1/2} \cdot \exp\left(\pm \int_{x_0}^x \sqrt{2 + 4t^2} dt\right) \sim x^{-1/2} \cdot \exp\left(\pm \int_{x_0}^x 2t \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right)^{1/2} dt\right) \sim \\ &\sim x^{-1/2} \cdot \exp\left(\pm \int_{x_0}^x 2t \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2t^2}\right) dt\right) \sim x^{-1/2} \cdot \exp\left(\pm \left(x^2 + \frac{1}{2} \ln x\right)\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad \text{Следовательно,}$$

$$z_1(x) \sim e^{x^2}, \quad z_2(x) \sim e^{-x^2}/x, \quad x \rightarrow +\infty. \quad \text{А тогда} \quad y_1(x) = a(x) z_1(x) \sim 1/x,$$

$$y_2(x) = a(x) z_2(x) \sim e^{-2x^2}/x^2, \quad x \rightarrow +\infty. \quad \text{Можно убедиться, что } y(x) = 1/x \text{ является решением}$$

исходного уравнения, а функция e^{-2x^2}/x^2 не является решением исходного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 448с.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТАЛЛОМАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА
 $\text{Ti}_3\text{Al} - \text{C}_{60}$: МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

О.Г. Комиссаренко¹, Е.А. Щепилов¹, А.С. Нарсеев¹, М.Д. Старостенков²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова

✉ komissarenko.og@edu.spbstu.ru

Введение. В современном мире развитие металломатричных композитов представляет собой важную научную задачу для любого металлурга. Комбинирование металлов с низкоразмерными углеродными соединениями является одним из возможных решений проблемы нехватки конструкционных материалов для многих областей [1].

Металломатричные композиты используются во многих сферах, например, в строительстве [2]. Важной характеристикой таких материалов является их масса. Ввиду высокой плотности металлов легкие изделия, обладающие заданными прочностными характеристиками, получить из них крайне сложно. Решением данной проблемы являются композиты на основе легких металлов, например алюминия, применяемых в конструкционных изделиях, однако он достаточно хрупкий [3]. Доказано, что такие армирующие элементы как фуллерены C_{60} , C_{70} , C_{84} могут улучшить характеристики алюминиевой матрицы [4, 5]. Высокая прочность, а также исключительные механические и физические характеристики делают их привлекательным вариантом для использования в качестве армирования в композитах на основе алюминия [6, 7]. Фуллерены могут рассматриваться как перспективный армирующий материал по сравнению с углеродными нанотрубками или графеном из-за их «нульмерной» геометрии. Они легко диспергируются и почти не повреждаются в ходе интенсивных процессов механической дисперсии, проводимых в композитах с металлической матрицей [8].

Методы и средства. Проведение натурных исследований композитов требует существенного материального обеспечения. Для первичных исследований целесообразно применять методы компьютерного моделирования. Так в исследованиях с использованием моделирования результаты удовлетворительно согласуются с полученными экспериментальными данными [9, 10]. Молекулярная динамика способна оперировать сотнями тысяч частиц, что удобно для понимания механизмов поведения материалов в наномасштабе и оценки механических свойств нанокompозитов. Этот метод хорошо подходит для расчета взаимодействия металл-углерод на уровне частиц [11-15].

Нашей задачей является исследование механических свойств (анализ зависимости напряжения от деформации) металломатричного композита Ti_3Al , армированного фуллеренами C_{60} . Исследование образца будем проводить методом компьютерного молекулярно-динамического моделирования в программе LAMMPS, при расчёте модели будем использовать суперкомпьютер Политеха.

При построении модели мы использовали готовую модель фуллерена C_{60} из веб-ресурса Дэвида Томанека и Ника Фредерика, а кристалл Ti_3Al был построен на основе элементарной ячейки интерметаллида. После этого, с использованием программы Atomsk, в кристалле была сделана полость, в которую в последствии поместили фуллерен C_{60} . Визуализация модели через программу OVITO представлена на Рис.1.

После создания модели кристалла был написан скрипт в LAMMPS. Программный пакет LAMMPS обладает необходимым функционалом для данной работы и дальнейшего анализа деформации композитов. Ранее он показал себя как эффективный инструмент для анализа различных аспектов трансформации структуры кристаллических решеток в результате внешних воздействий, включая исследование дефектов динамических и топологических,

Секция 2. Физика и науки о материалах

устойчивости к нагреву кристаллов, армированных фуллеренами для моделирования процессов сжатия и растяжения при разных скоростях. С помощью LAMMPS моделировались процессы растяжения и сжатия моделей при различных скоростях (от 10^{-10} до 10^{-8} пс $^{-1}$). Используя программу OVITO, мы смогли визуализировать эти процессы.

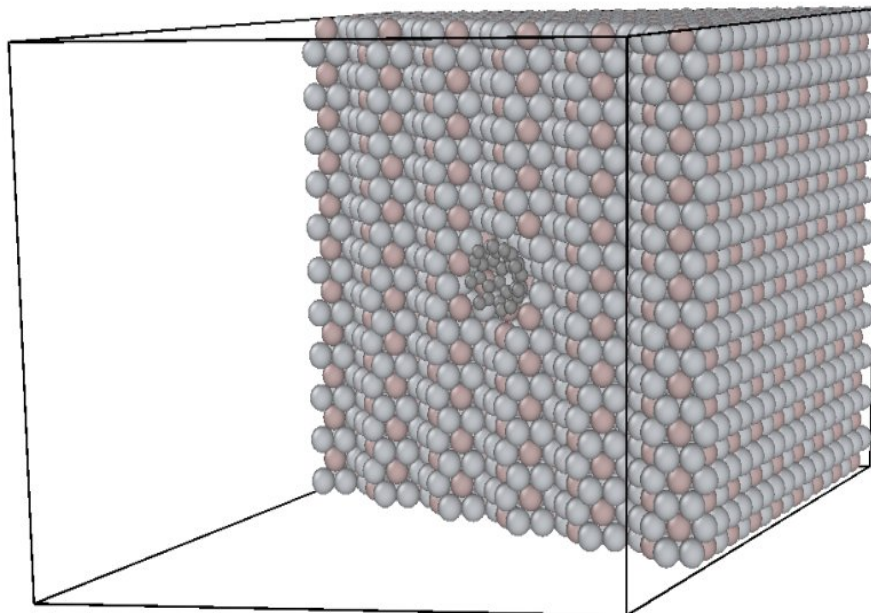


Рис. 1. Модель композита Ti_3Al , армированного фуллереном C_{60} в разрезе

Результаты и обсуждение. На основе полученных результатов мы построили зависимости напряжения композита от деформации (рис.2 – рис.4). По кривым зависимостей можно определить предел прочности, предел текучести и напряжение разрыва (на графике растяжения) материала. Все эти параметры позволяют точно определить прочностные характеристики материала.

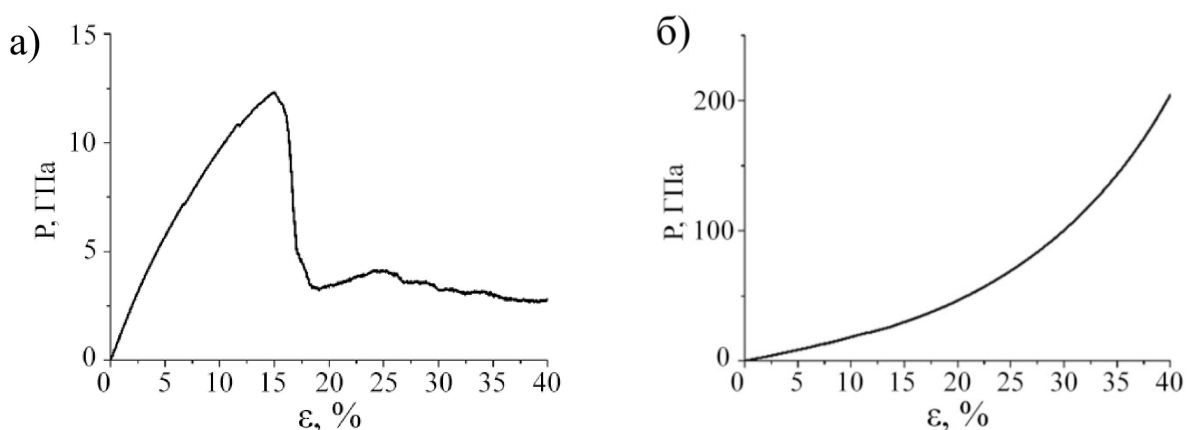


Рис. 2. Зависимости напряжения от деформации композита при растяжении (а) и сжатии (б), скорость деформации 10^{-8} пс $^{-1}$

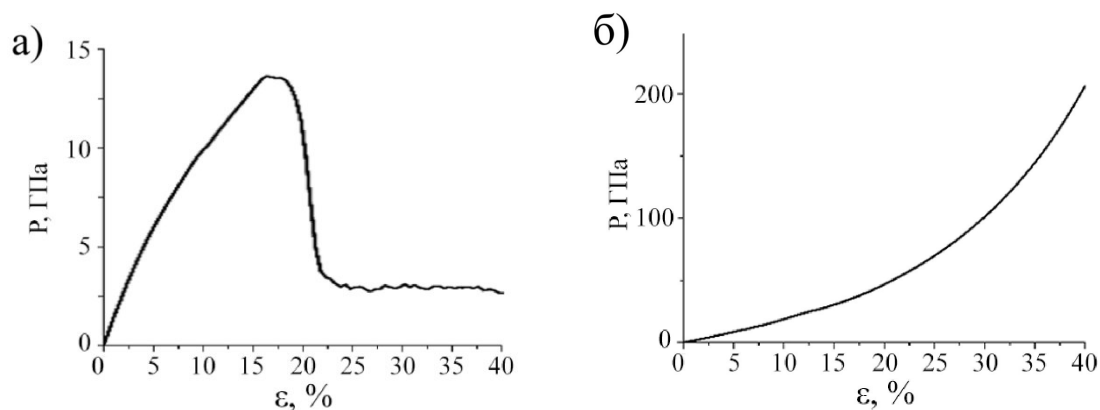


Рис.3. Зависимости напряжения от деформации композита при растяжении (а) и сжатии (б), скорость деформации 10^{-9} с^{-1}

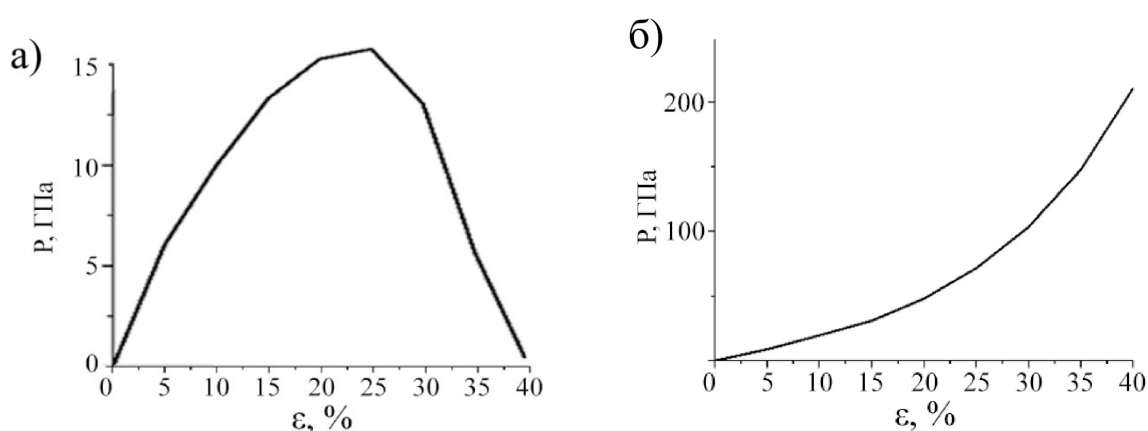


Рис.4. Зависимости напряжения от деформации композита при растяжении (а) и сжатии (б), скорость деформации 10^{-10} с^{-1}

По представленным графикам видно, что скорость деформации значительно влияет на прочностные характеристики Ti_3Al при растяжении. При сжатии изменений практически не наблюдается. При увеличении скорости деформации предел прочности материала снизился практически до 12,3 ГПа, когда как при меньшей скорости деформации материал выдерживал и 15,7 ГПа. Материал достаточно хрупкий, поэтому отсутствует зона текучести.

В сравнении с чистым металлом при растяжении заметно упрочнение, но фуллерены проявляют свои упрочняющие свойства в полном объеме при сжатии. Это можно увидеть при сравнении значений: в чистом металле значения при разных скоростях деформации колебались от 165 до 170 ГПа, а вот композит с фуллереном выдерживает от 185 до 190 ГПа. Эти результаты позволяют уверенно говорить об упрочняющих свойствах фуллеренов.

Результаты данного исследования позволяют получить ценные сведения о механических свойствах композиционных материалов, армированных фуллеренами, что может помочь в разработке новых высокоэффективных материалов для различных областей применения. Значимость исследования заключается в возможности оптимизации свойств материала путем подбора скорости деформации при растяжении и сжатии, что приведет к созданию новых композитных материалов с заданными механическими свойствами. Такой композитный материал может быть использован в различных областях, например авиационная, аэрокосмическая, автомобильная промышленность, защитные покрытия, спортивное снаряжение и оборудование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Angadi S. B., Nagaral M., Namdev N., Kumar S. M., Ali Z. A review on constituents, applications and processing methods of metal matrix composites // International Journal of Science and Research Archive. – 2024. – Vol. 11(1). – P. 2304–2314.
2. Gupta M. Introduction to Metal Matrix Composite Materials: An Introduction // Encyclopedia of Materials: Composites. – 2021. – Vol. 1. – P. 1–10.
3. Watanabe H., Sugioka M., Fukusumi M., Ishikawa K., Suzuki M., Shimizu T. Mechanical and Damping Properties of Fullerene-Dispersed AZ91 Magnesium Alloy Composites Processed by a Powder Metallurgy Route // MATERIALS TRANSACTIONS. – 2006. – Vol. 47(4). – P. 999-1007.
4. Zuev V. V., Ivanova Y. G. Mechanical and electrical properties of polyamide-6-based nanocomposites reinforced by fulleroid fillers // Polymer Engineering & Science. . – 2011. – Vol. 52(6). – P. 1206–1211.
5. Perfilov S. A., Evdokimov I. A., Pozdnjakov A. A., Blank V. D. Nanostructured aluminum-matrix composite material reinforced with fullerenes C₆₀ // Scientific proceedings xii international congress "machines, technologies, materials". – 2015. – Vol. 1. – P. 131.
6. Хайруллин Р. Р., Евдокимов И. А., Перфилов С. А., Поздняков А. А., Бланк В. Д. Наноструктурные алюмоматричные композиционные материалы с дуплексной структурой, модифицированные углеродными наноструктурами // Четвертый междисциплинарный научный форум с международным участием "новые материалы и перспективные технологии". – 2018. – № 3. – С. 334–336.
7. Ramesh B., Kumar D., Chhabria Sarika, Basavarajappa Vijaykumar, Krishnakumari A., Saravanan, M., Sannakki, Basavaraja, Kumaravel, D., Hassen, Abdulkadir Aman Investigation on the Properties of Multiwall Carbon Nanotube-, Graphene-, and Fullerene-Reinforced Hot-Extruded AA7075 Matrix Composites // Journal of Nanomaterials. – 2022. – Vol. 9419771. – P. 11.
8. P. Ajay Kumar, V. Vishnu Namboodiri, Gaurang Joshi & Kush P. Mehta Fabrication and applications of fullerene-based metal nanocomposites: A review // Journal of Materials Research – 2021. – Vol. 36. – P. 114–128.
9. Erturk A. S., Yildiz Y.O., Kirca M. Mechanical behavior of a novel carbon-based nanostructured aluminum material // Computational Materials Science. – 2018. – Vol. 144. – P. 193–209.
10. Черногорова О. П., Дроздова Е. И., Бульенков Н. А. Получение и моделирование сверхтвердой фазы из фуллеренов в металлической матрице // Породоразрушающий и металлообрабатывающий инструмент – техника и технология его изготовления и применения. – 2006. – № 9. – С. 219–224.
11. Yankovskaya U.I., Starostenkov M.D., Medvedev N.N., Zakharov P.V. Methods for modeling composites reinforced with carbon nanotubes: review and perspectives // Computer Research and Modeling, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1143-1162
12. Ujah, C. O., Kallon, D. V. V., & Aigbodion, V. S. (2023). Tribological Properties of CNTs-Reinforced Nano Composite Materials. Lubricants. – Vol.11(3) – 95.
13. Yankovskaya U.I. et al. Enhanced mechanical properties of Ni₃Al composites reinforced with single-walled and multi-walled carbon nanotubes: An atomistic modeling study // Journal of Micromechanics and Molecular Physics. – 2024. – Vol. 09. – No. 02n03. – pp. 99-105
14. Янковская У.И., Захаров П.В., Старостенков М.Д., Нарсеев А.С., Маркидонов А.В. Влияние ориентации углеродных нанотрубок на механические свойства нанокомпозита Ni₃Al / Ультрамелкозернистые и наноструктурные материалы. Сборник трудов открытой школы-конференции стран СНГ. Уфа, – 2024. – С. 351-352.
15. Yankovskaya U.I., Zakharov P.V., Markidonov A.V., Starostenkov M.D., Korznikova E.A. Mechanical properties of cnt-reinforced pt under compression: molecular dynamics simulation // Materials Physics and Mechanics. – 2023. – Т. 51. – № 3. – С. 167-174.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ В
КОЛЛОИДНЫХ НАНОКРИСТАЛЛАХ CDSE, ЛЕГИРОВАННЫХ ПО ОБЪЁМНОМУ И
ПОВЕРХНОСТНОМУ ТИПУ

Г.А. Куприянов¹, А.Н. Ипатов^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Академический университет имени Ж. И. Алфёрова РАН, Санкт-Петербург, Россия

✉ henryweis3@gmail.com

Введение. В настоящее время происходит активное развитие различных отраслей электроники. Одним из перспективных направлений в данной области является создание принципиально новых материалов, чьи свойства отличаются от свойств аналогичных объёмных соединений. В число дисциплин, вносящих большой вклад в изучение подобных материалов, входит наноплазмоника, которая рассматривает взаимодействие электромагнитного излучения с веществом на наноразмерном уровне. Особо в этой области следует выделить легированные полупроводниковые нанокристаллы, для которых характерно наличие дипольных плазмонных резонансов в оптических спектрах поглощения [1]. На положение резонансной линии в этих спектрах влияет ряд параметров, таких как геометрические размеры нанокристалла, концентрация свободных носителей, свойства окружающей среды и тип легирования, который может быть условно определён как поверхностный или объёмный. Различный профиль легирования определяет различия в распределении электронной плотности в основном состоянии, что влияет на свойства оптических спектров. Целью данной работы было исследование зависимости распределения электронной плотности по объёму нанокристалла от типа легирования.

Теоретический подход. В данном исследовании были рассмотрены n-легированные нанокристаллы CdSe, легированные по поверхностному и объёмному типу. Нанокристалл рассматривался как электронейтральная система взаимодействующих фермионов, которая находится в диэлектрической среде. Полный гамильтониан такой системы, состоящей из N электронов, определяется следующим образом:

$$\hat{H} = \sum_i^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m_e} + \sum_i^N U_{ext}(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_j), \quad (1)$$

где V – парный кулоновский потенциал взаимодействия электронов друг с другом, U_{ext} – внешний потенциал, который представляет собой сферическую потенциальную яму, чей геометрический параметр R задаётся размерами нанокристалла, а профиль зависит от типа легирования.

Так, для нанокристаллов, легированных по поверхностному типу, свободные носители инжектированы в полупроводниковую наночастицу при помощи донорных или акцепторных примесей, расположенных на её поверхности [2]. В этой ситуации внешний потенциал имеет вид сферической потенциальной ямы с непроницаемыми стенками.

При легировании по объёмному типу, предполагается, что положительный заряд, будучи равномерно распределённым по объёму нанокристалла, нейтрализован зарядом легирующих примесей [3]. Внешний потенциал в данном случае имеет вид потенциала равномерно заряженного шара с зарядом $Z = Ne$.

Для учёта межчастичного взаимодействия в основном состоянии использовалось приближение Хартри-Фока, а также были произведены расчёты в приближении локальной плотности для сравнения результатов. В рамках приближения Хартри-Фока, одночастичные волновые функции $\phi_i(\mathbf{r})$ должны удовлетворять самосогласованным уравнениям [4]:

$$-\frac{\hbar^2 \Delta_i}{2m_e} \phi_i(\mathbf{r}_i) + (U_{ext}(\mathbf{r}_i) + U_H(\mathbf{r}_i) + U_x(\mathbf{r}_i)) \phi_i(\mathbf{r}_i) = E_i \phi_i(\mathbf{r}_i) \quad (2)$$

Здесь $U_H(\mathbf{r})$ – хартриевский потенциал, определяемый в зависимости от параметров и структуры системы, $U_x(\mathbf{r})$ – нелокальный обменный потенциал, E_i – одночастичные электронные энергии. В тоже время, в случае приближения локальной плотности, волновые функции $\phi_i(\mathbf{r})$ должны удовлетворять уравнениям Кона-Шема, в рамках которых вместо нелокального обменного потенциала, выраженного через одночастичные волновые функции, в уравнения включены локальные обменные потенциалы $U_x(\mathbf{r})$ в приближении Дирака – Слэтера [5].

Обсуждение результатов. Расчёты распределения электронной плотности в объёме нанокристалла в основном состоянии производились для систем радиуса $R = 2$ нм, обладающих замкнутыми электронными оболочками, имеющих различное количество N свободных электронов. Результаты для нанокристаллов, легированных по поверхностному типу, и нанокристаллов, легированных по объёмному типу, оказались существенно различными.

Так, для поверхностно-легированных нанокристаллов распределение электронной плотности по объёму нанокристалла оказывается в значительной степени неоднородно. Это связано с кулоновским взаимодействием электронов и с особенностями электронной структуры системы. Первоначально происходит заполнение электронных оболочек с наибольшими возможными орбитальными моментами, из-за чего радиальные компоненты одночастичных волновых функций не имеют корней в объёме кристалла.

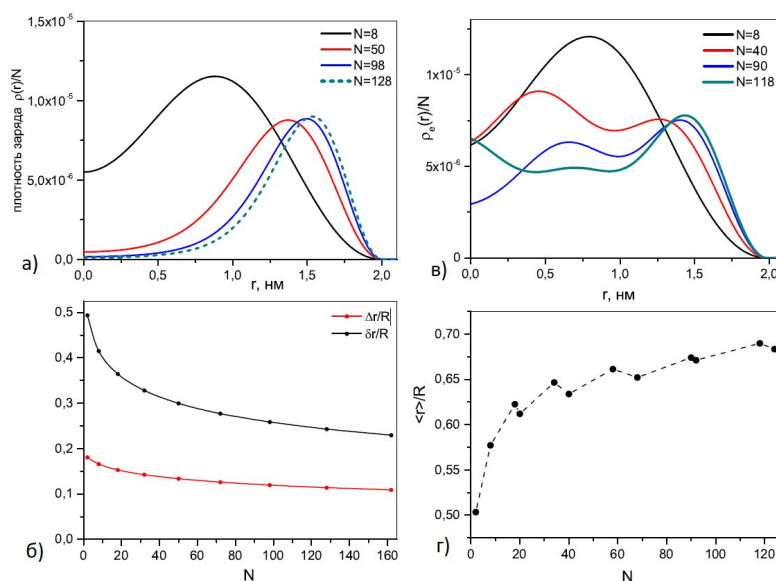


Рис. 1. а) Распределения приведенной плотности заряда электронов $\rho_e(r)/N$ в объёме поверхностно-легированного кристалла CdSe для различного числа электронов N ; б) Зависимости приведенного смещения среднего радиуса электронной системы $\Delta r = R - \langle r \rangle / R$ и приведенной эффективной ширины электронного слоя $\delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} / R$; в) Приведенные радиальные распределения электронной плотности $\rho_e(r)/N$ в объёмно-легированных нанокристаллах CdSe, имеющих различное число электронов N ; г) Зависимость отношения среднего радиуса электронной системы к радиусу нанокристалла $\langle r \rangle / R$ от числа ее частиц

На Рис. 1а приведены зависимости распределения объёмной плотности заряда от расстояния до центра системы для поверхностно-легированных нанокристаллов CdSe радиуса $R = 2$ нм, содержащих разное число свободных носителей N . Из приведённых зависимостей видно, что основная часть электронной плотности оказывается сосредоточена вблизи

поверхности нанокристалла, причём с ростом числа носителей, их локализация становится всё более и более узкой. Это подтверждается зависимостью отношения среднего электронного радиуса $\Delta r = R - \langle r \rangle / R$ к радиусу нанокристалла R от числа электронов N , приведённого на Рис. 1б. Также на этом же рисунке приведена аналогичная зависимость отношения приведённой эффективной ширины распределения электронной плотности $\delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$ к радиусу нанокристалла R . Как видно из рисунка, с ростом числа носителей действительно происходит убывание дисперсии электронного радиуса, вследствие чего система принимает достаточно узкое радиальное распределение.

Результаты расчётов, проведённых при помощи приближения Хартри-Фока, оказались практически идентичны результатам, полученным при помощи обменных матриц Дирака, для всех рассмотренных значений числа свободных носителей.

В случае объёмного легирования заполнение электронных оболочек происходит аналогично ситуации, наблюдаемой в кластерах щелочных металлов. То есть, в отличие от поверхностно-легированных нанокристаллов, происходит попеременное заполнение орбиталей, чьи радиальные волновые функции имеют корни, и орбиталей с бескорневыми радиальными волновыми функциями. Вследствие такого порядка заполнения электронных оболочек, в объёмно-легированных нанокристаллах наблюдается более равномерное распределение электронной плотности по объёму системы, чем в поверхностно-легированных, что видно на Рис. 1в.

Кроме того, зависимость среднего радиуса электронной системы от числа свободных носителей, приведённая на Рис. 1г, имеет ступеньки. Это связано с тем, что орбитали с бескорневыми радиальными волновыми функциями имеют большее значение среднего радиуса, чем орбитали с волновыми функциями, обладающими корнями.

Выводы. В данной работе были произведены расчёты основного состояния электронной системы в коллоидных нанокристаллах CdSe, легированных по поверхностному и по объёмному типу. Было продемонстрировано, что распределение электронной плотности по объёму кристалла для этих двух типов легирования существенно различается. Так, в случае поверхностного легирования электронная плотность оказывается в значительной мере локализована у поверхности нанокристалла, причём с ростом числа свободных носителей, растёт степень локализации. В случае же систем с объёмным типом легирования, электронная плотность значительно более равномерно распределена в объёме нанокристалла, что связано с аналогичностью порядка заполнения орбиталей случаю кластеров щелочных металлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tame M. S., McEnery K. R., Özdemir Ş. K., Lee J., Maier S. A., Kim M. S. Quantum plasmonics // *Nature Physics*. – 2013. – Vol. 9. – P. 329–340.
2. Schimpf A. M., Gunthardt C. E., Rinehart J. D., Mayer J. M., Gamelin D. R. Controlling carrier densities in photochemically reduced colloidal ZnO nanocrystals // *Journal of the American Chemical Society*. – 2013. – Vol. 135. – No. 44. – P. 16569–16577.
3. Zhang H., Kulkarni V., Prodan E., Nordlander P., Govorov A. O. Theory of quantum plasmon resonances in doped semiconductor nanocrystals // *The Journal of Physical Chemistry. C*. – 2014. – Vol. 118. – No. 29. – P. 16035–16042.
4. Ipatov A. N., Gerchikov L. G. Many-particle correlations in microscopic electron-hole droplets // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. – 2014. – Vol. 47. – No. 18. – P. 185101
5. Dreizler R. M., Gross E. K. U. Density functional theory: An approach to the quantum many-body problem. – Springer, Berlin, 1990. – 302 p.

БЕСКОНТАКТНЫЕ МЕТОДЫ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СВОЙСТВ
ВТСП ЛЕНТ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ

А.Е. Рудоминский^{1,2}, М.П. Волков¹, Д.С. Чикуров¹

¹Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе РАН

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ a.rudominskiy@mail.ioffe.ru

В последние годы наблюдается значительный прогресс в области разработки и практического применения высокотемпературных сверхпроводящих (ВТСП) лент второго поколения, имеющих общий состав $REBa_2Cu_3O_{7-x}$ (где RE — редкоземельный элемент). Эти ленты демонстрируют большие значения намагниченности и плотности критических токов, достигающих порядка 100 А/мм ширины ленты при температуре жидкого азота ($T = 77$ К). Такие параметры делают их перспективными для использования в различных энергетических и инженерных приложениях, включая создание мощных магнитов, энергоэффективных кабелей и устройств для накопления энергии [1-2]. Конструктивно ВТСП лента представляет собой сложную многослойную структуру, в которой сверхпроводящий слой имеет толщину порядка 1 мкм и расположен внутри ленты. Этот слой окружен защитными и вспомогательными слоями, которые обеспечивают эпитаксиальный рост слоя и защиту от внешних воздействий. В то же время такая многослойная структура создает трудности при прямом измерении критического тока резистивными методами, так как сверхпроводящий слой недоступен для непосредственного контакта. В связи с этим для определения критических токов I_c ВТСП лент широко применяются бесконтактные методы измерения. Для характеристики ВТСП лент второго поколения производства фирмы SuperOx (Москва) использовались три бесконтактных метода: измерение намагниченности, измерение критических токов методом захвата потока в кольце и Холловская магнитометрия.

Удобным методом характеристики ВТСП является измерение зависимостей намагниченности от температуры $M(T)$ и от внешнего магнитного поля $M(H)$. Измерения намагниченности проводились вибрационным методом, при котором регистрируется компонента магнитного момента, параллельная приложенному магнитному полю. Из зависимости $M(T)$ можно определить критическую температуру T_c сверхпроводника, а из зависимости $M(H)$ можно оценить критический ток I_c , используя модель критического состояния (модель Бина) [3]. Кроме того, можно оценить зависимость критических токов ленты от ориентации магнитного поля относительно плоскости ленты $I_c(H)$ [4], хотя при наклонной ориентации магнитного поля оценка критического тока осложнена рядом обстоятельств. Во-первых, при ориентации поля близкой к параллельной плоскости ленты, следует учитывать влияние поверхностного барьера. [5]. Во-вторых, известен эффект [6], при котором направление магнитного момента образца продолжает оставаться нормальным (перпендикулярным) плоскости ленты, при небольшом отклонении направления внешнего магнитного поля от нормали. Аналогичное поведение наблюдается и при небольшом отклонении ориентации приложенного поля от параллельной ориентации.

Другим бесконтактным методом определения критического тока ленты и его зависимости от величины и ориентации магнитного поля является метод захвата магнитного потока в сплошном кольце из ВТСП ленты. Для изготовления кольца по центру ширины ленты выполняется продольный разрез, который не доходит до краев отрезка ленты. В полученный разрез вставляется диэлектрическое кольцо-фиксатор. [7] В результате формируется сплошное сверхпроводящее кольцо, ширина которого составляет половину ширины исходной ленты. Для измерения критического тока в сверхпроводящем кольце используется следующая методика: через площадь кольца создается магнитный поток, который индуцирует в кольце

экранирующий ток. Величина этого тока ограничена критическим током ленты. Магнитное поле в центре кольца, создаваемое как внешним источником, так и током самого кольца, измеряется с помощью датчика Холла. По результатам измерений можно определить предельное значение магнитного поля, при котором вклад поля от тока кольца перестает изменяться, что соответствует достижению критического тока I_c ВТСП-ленты. Максимальное поле, создаваемое током кольца, позволяет рассчитать I_c с использованием простой формулы для магнитного поля в центре витка с током. Критический ток ВТСП-ленты также может быть определен по максимальному захваченному магнитному потоку в кольце после отключения внешнего поля. Второй способ позволяет найти I_c и в нулевом магнитном поле. Магнитный поток внутри кольца может быть создан как внешним соленоидом, так и соленоидом, помещенным внутрь полости кольца. Однако генерация магнитного поля внутренним соленоидом предпочтительна ввиду минимизации влияния внешнего магнитного поля на критические параметры сверхпроводника. Известно, что в ВТСП-лентах критический ток уменьшается во внешнем магнитном поле, и если к участку кольца приложить локально магнитное поле, то критический ток кольца будет определяться именно пониженным значением критического тока этого участка. Исходя из этого, в работе [8] была предложена конструкция устройства для измерения зависимостей критического тока от величины и ориентации магнитного поля, в котором магнитное поле прикладывается локально с помощью системы постоянных магнитов. Сильные постоянные магниты из сплава NdFeB были закреплены на держателе, позволяющем плавно сближать магниты. Дополнительно в предложенном устройстве имеется возможность плавного изменения ориентации приложенного поля от направления, перпендикулярного плоскости ленты, до параллельной плоскости.

Третьим использованным бесконтактным методом оценки сверхпроводящих параметров является Холловская магнитометрия небольшого отрезка ВТСП ленты. Этот метод представляет собой наиболее простой, но в то же время эффективный метод оценки величины критического тока ленты и его зависимости от внешнего магнитного поля. Данный подход основан на использовании двух датчиков Холла, которые закрепляются в конфигурации, позволяющей измерять компоненты магнитного поля параллельно и перпендикулярно плоскости ВТСП ленты. При вращении системы образец–датчики относительно направления внешнего магнитного поля, создаваемого электромагнитом, можно регистрировать две ортогональные компоненты магнитного поля, индуцированного образцом, в широком диапазоне углов (от 0 до 180 градусов). Эти компоненты напрямую связаны с зависимостями намагниченности $M(H)$ ВТСП ленты, но в отличие от измерения намагниченности вибрационным методом позволяет определить «векторную» намагниченность образца. Таким методом можно определить возможное сохранение направления магнитного момента образца вблизи продольной и параллельной ориентации ленты к ориентации поля.

Следует отметить, что оценка критического тока на основе измеренных значений намагниченности ленты должна учитывать магнитные свойства металлической подложки из сплава Хастеллой С276. В работе [4] было показано, что заметный вклад в общую намагниченность подложка вносит только вблизи критической температуры сверхпроводника (91К), а вблизи температуры 77К может не учитываться.

В целом, применение бесконтактных методов позволяет достаточно просто и надежно определять критические параметры ВТСП ленты, особенно анизотропию критических токов в небольших магнитных полях, что существенно для проектирования магнитных систем с использованием ВТСП лент.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-29-00390

Авторы выражают благодарность фирме СуперОкс (Москва) за предоставление образцов ВТСП лент.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Baburin *et al.* Design, Manufacturing and Tests of an All-HTS 20 T Magnet // IEEE Transactions on Applied Superconductivity – 2024 – vol. 34(5) – P. 1-4.
2. M. Moyzykh *et al.* First Russian 220 kV Superconducting Fault Current Limiter (SFCL) For Application in City Grid //IEEE Transactions on Applied Superconductivity – 2021– vol.31(5) – P.1-7.
3. G. P. Mikitik. Critical states in thin planar type-II superconductors in a perpendicular or inclined magnetic field (Review) // Low Temp. Phys. – 2010– vol 36(1) – P. 13–38.
4. Д. С. Чикуров, А. Е. Рудоминский, М. П. Волков, особенности анизотропии намагниченности лент высокотемпературного сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ // Письма в Журнал технической физики. – 2025. – Т. 51, № 1. – С. 23-25.
5. Д.С. Чикуров, М.П. Волков. Скачки магнитного потока при намагничивании пластины сверхпроводящего ниобия при ориентации магнитного поля нормально и параллельно поверхности // Журнал технической физики – 2021 – Т. 91 – №5 – С. 784-792.
6. D. M. Gokhfeld, S. V. Semenov, M. I. Petrov. Anisotropy and Crystallite Misalignment in Textured Superconductors //J Supercond Nov Magn – 2023 – vol. 36 – P. 59-65.
7. D.S. Chikurov, A.E. Rudominskiy, M.P. Volkov. Magnetization and Flux Capture in a Superconducting Ring Made of High-Tc 2G Tape // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2023 – vol.16 (6) – P. 838–844.
8. Д. С. Чикуров, А. Е. Рудоминский, М. П. Волков. Бесконтактный метод измерения зависимости критического тока ленты из высокотемпературного сверхпроводника от величины и ориентации магнитного поля // Научное приборостроение. – 2024 – Т. 34 – № 1 – С. 37-42.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОТ ИХ ПЛОТНОСТИ

Д.О. Рыбаков, В.Е. Величкин

Государственный университет просвещения, г. Москва

✉ daniil.rybakov.0303@mail.ru

Показатель преломления является важным физическим параметром, который описывает, насколько сильно свет отклоняется при переходе через границу двух сред с разными оптическими свойствами. В различных исследованиях показано, что показатель преломления жидкости зависит от её плотности, а также от других факторов, таких как температура, химический состав и длина волны света [1], [2]. Одним из первых законов, описывающих преломление света, является закон Снеллиуса, который был установлен в XVII веке Виллебрордом Снеллиусом и Рене Декартом. Закон Снеллиуса описывает взаимосвязь между углами падения и преломления при переходе света через границу двух сред [3].

Современные исследования показали, что показатель преломления жидкости может изменяться в зависимости от её плотности. В частности, работы, проведенные в области оптики и химии, демонстрируют, что более плотные жидкости имеют более высокий показатель преломления, что обусловлено их более высокой оптической плотностью [4]. Например, исследования, проведенные Ландсбергом, описывают влияние плотности на показатель преломления в различных средах и показывают, как это может быть использовано для создания оптических материалов с заданными свойствами [5].

Методы измерения показателя преломления варьируются от простых оптических приборов, таких как рефрактометры, до более сложных установок, использующих лазерные технологии для измерения углов полного внутреннего отражения. Рефрактометры Аббе, например, широко используются в химической и фармацевтической промышленности для измерения показателя преломления растворов и жидкостей, что также имеет практическое значение для мониторинга качества продукции [6].

Цель проекта: определить, как влияет плотность на показатель преломления среды.

Задачи: 1. Изучить теорию по теме исследования; 2. Экспериментально продемонстрировать данную зависимость.

Для того, чтобы получить экспериментальную зависимость показателя преломления среды от её плотности, использовались следующие жидкости, которые свободно пропускали световые лучи и отличались плотностью. Были выбраны такие вещества, как бензол (C_6H_6), тетрахлорметан (CCl_4), гексан (C_6H_{14}), этанол (C_2H_5OH), глицерин ($C_3H_5(OH)_3$). В рамках эксперимента использовались следующие методы для измерения углов падения и преломления, а также для вычисления плотности и показателя преломления:

Для измерения углов падения и преломления использовался транспортир, который позволяет точно фиксировать угол между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности раздела сред. Точность измерений составила 1° .

Чтобы обеспечить высокую точность измерений и минимизировать ошибки использовался метод лазерного луча, а именно He-Ne лазер, который позволял точно отслеживать направление светового потока и фиксировать его отклонение при переходе через различные жидкости. Для каждого из выбранных веществ эксперимент проводился при углах падения 20° , 45° и 60° . Это позволило точно определять угол преломления для каждого из выбранных углов падения. Значения плотности брали из таблицы. Показатель преломления вычислялся с использованием закона Снеллиуса, который выражается следующей формулой:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, (1)$$

Секция 2. Физика и науки о материалах

где α – угол падения, β – угол преломления.

Для простоты проведения опыта использовалась металлическая доска, на ней размещалась кювета с магнитом, которая в ходе опытов заполнялась разными жидкостями.

Эти методы позволили получить высокоточную информацию о зависимости показателя преломления от плотности различных жидкостей, а также уточнить параметры, влияющие на точность измерений.

Используемая экспериментальная установка представлена на рисунке 1.



Рис.1. Экспериментальная установка для исследования зависимости величины коэффициента преломления от плотности вещества

На рисунках 2-3 представлено прохождение луча He-Ne лазера сквозь жидкости. На рисунке 2 показано отклонения лазерного луча при его прохождении через слой бензола (C_6H_6).

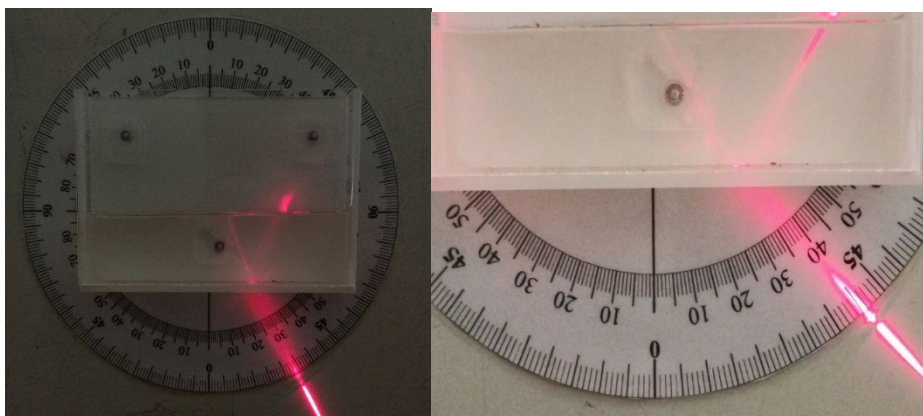


Рис.2. Преломление падающего луча He-Ne лазера при прохождении его через бензол (C_6H_6); угол падения α : а) 20° , б) 45°

Плотность бензола составляет $\rho = 0,879 \frac{г}{см^3}$. На основании расчетов по формуле

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \text{ среднее значение показателя преломления } \langle n \rangle = 1,501.$$

Для этанола (C_2H_5OH) плотность составляет $\rho = 0,789 \frac{г}{см^3}$, а средняя значение показателя преломления для него 1,361. Ход лучей можно увидеть на рисунке 3. Аналогично делаем для оставшихся веществ.

В ходе эксперимента была исследована зависимость показателя преломления от плотности для различных жидкостей. Для каждой из жидкостей были измерены углы падения и преломления, после чего вычислены показатели преломления с использованием формулы (1).

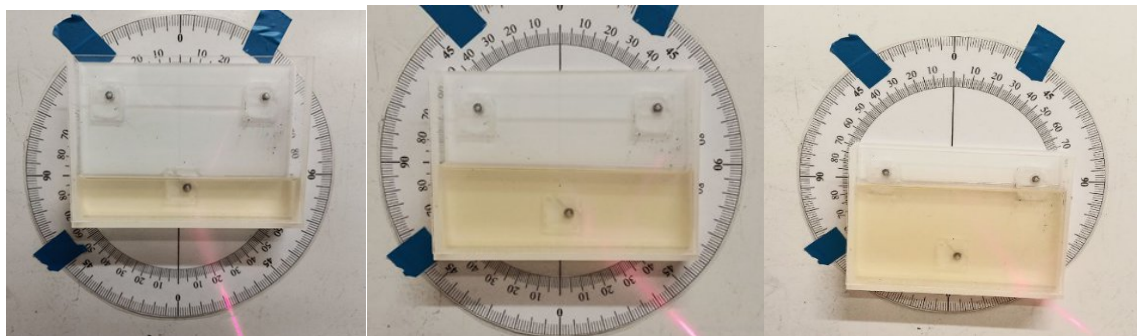


Рис. 3. Преломление падающего луча He-Ne лазера при прохождении его через этанол (C_2H_5OH); угол падения α : а) 20° , б) 45° , в) 60°

На основе полученных данных была построена зависимость величины показателя преломления образцов n от их плотности (рис. 4).

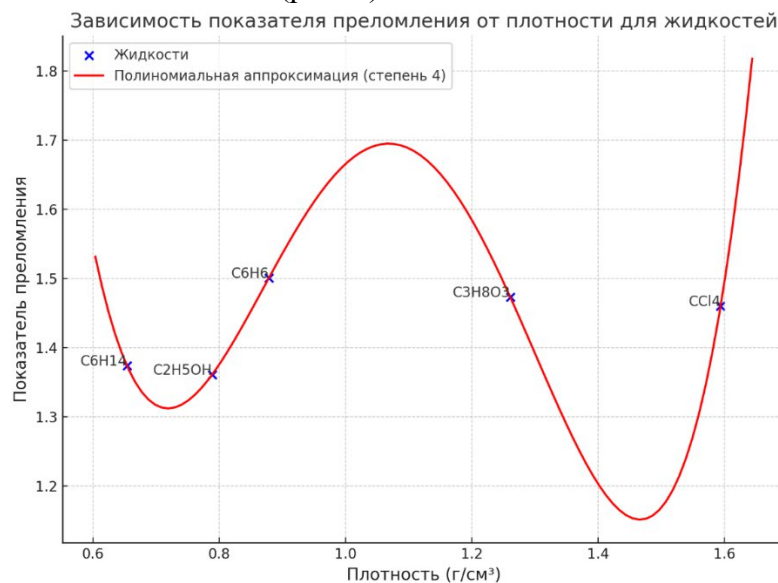


Рис 4. График зависимости показателя преломления от плотности жидкости

Результаты подтвердили, что плотность жидкости оказывает влияние на её показатель преломления. На основе экспериментальных данных было построено уравнение полинома четвертой степени, которое наилучшим образом аппроксимирует полученные результаты (2):

$$n = 26,7529\rho^4 - 106,0591\rho^3 + 159,5526\rho^2 - 102,1199\rho + 23,5389 \quad (2)$$

Коэффициент корреляции между экспериментальными значениями и предсказанными значениями, полученными с помощью полинома, составил 0,97, что подтверждает высокую точность модели. Полученная зависимость показателя преломления от плотности может быть использована для более точных расчетов и разработки новых материалов с заданными оптическими характеристиками. Эти результаты имеют большое значение для улучшения качества оптических приборов и других технологий, связанных с преломлением света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдин Л.Л., и др. Лабораторные занятия по физике. — М.: Наука, 1983. — 704 с.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 848 с.
3. Кошкин Н., Ширкевич М. Справочник по элементарной физике. — М.: Изд-во "Наука", 1972. 256 с.
4. Можаров Г.А. Основы геометрической оптики. — М.: Логос, 2006. — 280 с.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 848 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 4. Волны. Оптика. — М.: Наука, 1998. — 256 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ МЕХАНИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ, ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

М.Н. Сизов, Е.Н. Васильчикова, М.С. Константинов
Государственный университет просвещения, г. Москва
✉ misha-siz@mail.ru

Введение. В основе метода фотоупругости лежит интерференция поляризованных волн, причиной которой является оптическая анизотропия, возникающая в изотропном материале под действием механической нагрузки. Актуальность традиционного поляризационно-оптического метода исследования напряжений в оптически-чувствительных моделях обусловлена синтезом новых материалов, разработкой технологий и методов анализа, а также необходимостью решения сложных конструкторских задач в механике, в горном деле, металлургии, медицине [1–3].

1. Физические основы метода. Из оптики известно [4], что анизотропные кристаллические пластины имеют два главных направления, соответствующие показателям преломления n_o и n_e (обыкновенная и необыкновенная волны). Анизотропия $\Delta n = (n_o - n_e)$ приводит к двойному лучепреломлению: внутри образца вектор $\vec{E}_0$ в падающей линейно-поляризованной волне раскладывается на два взаимно перпендикулярных вектора $\vec{E}_{0x}$ и $\vec{E}_{0y}$. Данные волны проходят через пластинку с разными скоростями (обратно пропорциональными соответствующим показателям преломления) и выходят из нее с фазовым сдвигом:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d, \quad (1)$$

где d – толщина образца, λ – длина волны излучения, n_o и n_e – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн.

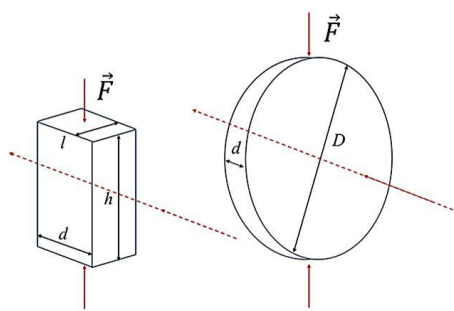


Рис. 1. Исследуемые образцы

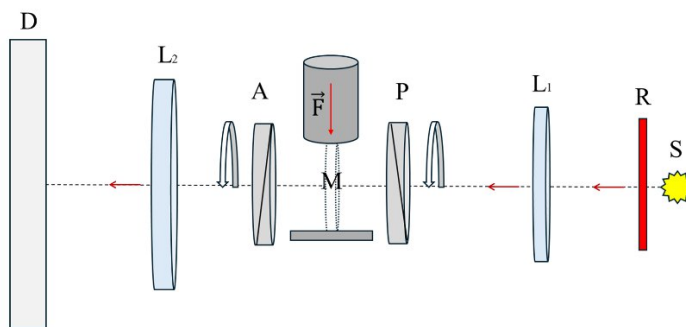


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Выходящие из кристаллической анизотропной пластины поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и обладают постоянной разностью фаз. Таким образом возникают два различных метода исследования напряженного состояния: 1) анализ состояния эллиптически поляризованного света, полученного на выходе из пластины; 2) анализ интерференционной картины в белом свете или монохроматическом свете. В работе применялись оба метода, поэтому в зависимости от поставленной задачи использовались различные образцы и источники света.

2. Исследование состояния поляризации света. Анализ поляризации света, проходящего через нагруженный образец, проводится в плоском полярископе (рис. 2), который включает в себя источник света L (полупроводниковый лазер с длиной волны $\lambda = 650$ нм), два поляроида – поляризатор P и анализатор A, между которыми помещен

Секция 2. Физика и науки о материалах

исследуемый нагруженный образец М, и фотоприемник D, измеряющий результирующую интенсивность света. Исследуемый образец имеет форму параллелепипеда со следующими геометрическими размерами $d = 10,3$ мм; $l = 8$ мм; $h = 17,6$ мм (рис. 1).

В этом случае разность фаз (1) можно представить в виде:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot C \cdot \frac{F}{dl} = 2\pi \cdot \left(\frac{C}{\lambda}\right) \cdot \frac{F}{l}, \quad (2)$$

где F – приложенная к образцу сила, C – коэффициент фотоупругости.

Интенсивность результирующей волны на выходе из анализатора определяется соотношением [4]:

$$I_{\text{рез}} = I_0 \left\{ \cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (3)$$

Здесь α и β – углы, которые разрешенные направления поляризатора и анализатора, составляют с горизонтальной осью, причем угол остается фиксированным $\alpha = \pi/4$.

В эксперименте устанавливается зависимость максимального и минимального значений интенсивности света от нагрузки F :

$$\arctg \left(\sqrt{\frac{I_{\min}}{I_{\max}}} \right) = \pi \cdot \left(\frac{C}{\lambda}\right) \cdot \frac{F}{l} \quad (4)$$

В результате получено значение коэффициента фотоупругости $C = (4,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$, что находится в удовлетворительном согласии с данными других авторов.

3. Наблюдение изохроматических полос. Изохроматические полосы в фотоупругом методе – это контуры на изображении, которые представляют собой области одинаковых значений главных напряжений или деформации в материале. Схема экспериментальной установки, позволяющей визуализировать распределение напряжений внутри образца, представлена на рис. 2. В данном эксперименте лазер заменяется источником белого света. Исследуемая интерференционная картина проецируется на экран и фиксируется фотокамерой. Подсчет порядка полосы удобнее проводить в монохроматическом свете, с этой целью используется светофильтр (R).

Для проведения исследования были подготовлены образцы в форме диска из эпоксидной смолы отечественного производителя (рис. 1). Диаметр диска $D = 30$ мм, толщина $d = 5$ мм. Нагрузка на образец производится с помощью механического пресса, как и в методе, описанном выше. Динамика изохроматических полос представлена на рис. 3. Заметно, как с ростом величины нагрузки увеличивается и порядок полос. Для диска, сжатого диаметрально противоположными силами, источник полос находится в точках приложения сил, а вот полоса нулевого порядка совпадает с контуром диска.

Для теоретического моделирования изохроматических полос и их количественного описания необходимо определить цену полосы τ_0 и константу фотоупругости C исследуемого материала. Для этого использовалась следующая методика. Рассматривается любая точка образца, (для удобства был выбран центр), и фиксируются значения сил, при которых через данную точку проходят порядковые номера полос. Затем по этим данным строится график функции $m = f(F)$ зависимости порядка полосы от приложенной силы. График представляет собой линейную зависимость, по угловому коэффициенту которой и определяются необходимые для моделирования константы.

$$\tau_0 = 8,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad C = 82 \text{ брюстер}$$

Выражение, дающее в явном виде зависимость между координатами x и y и значением m любой полосы, имеет следующий вид [5]:

$$\frac{K}{m} = \frac{(R^2 + x^2 + y^2)^2 - 4R^2 y^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (5)$$

где $K = \frac{2FR}{\pi d \tau_0^{(d)}}, \quad \tau_0 = \frac{4F}{\pi \pi D d}.$

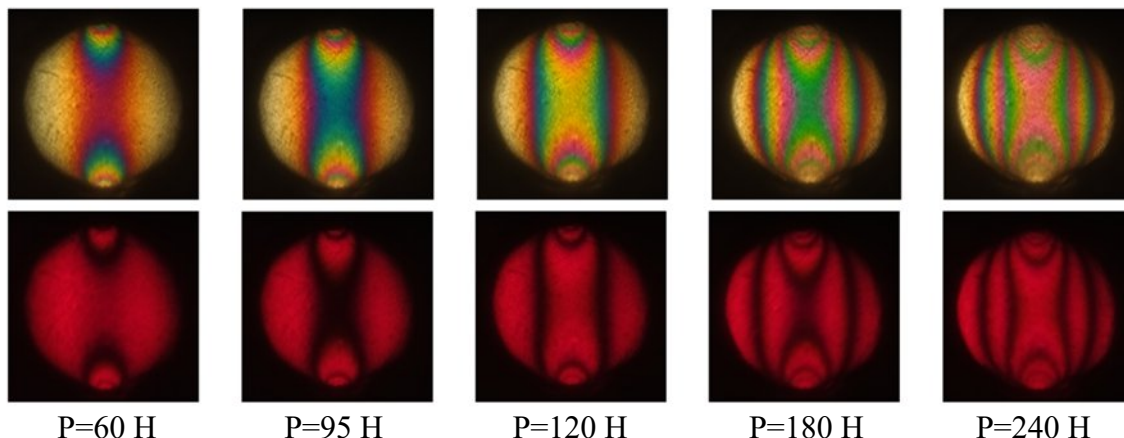


Рис. 3. Экспериментальная динамика изохроматических полос по мере увеличения нагрузки на образец в белом и монохроматическом свете

Таким образом, зная цену полосы, можно рассчитать теоретические значения сил, соответствующие любому положению полосы каждого из порядков. На рис. 4 представлены расчетные значения сил, соответствующие картинам полос, изображенных на рис. 3.

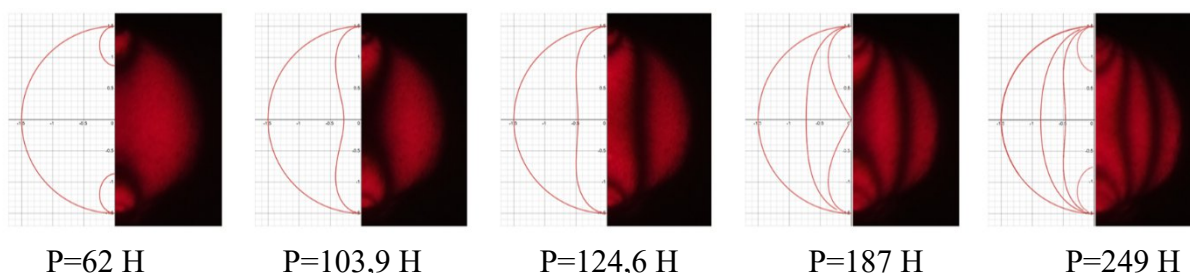


Рис. 4. Моделирование изохроматических полос, с указанием теоретических нагрузок

Погрешность метода определения фотоупругих констант составляет 9 %.

Заключение. В ходе выполнения работы были исследованы основные механизмы, лежащие в основе фотоупругого эффекта, установлены теоретические зависимости состояния поляризации света от нагрузки. Результаты математического моделирования изохроматических полос при различных нагрузках находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанова Л. В. Цифровая фотоупругость и ее применение для задач механики разрушения: учебное пособие. Самара, Издательство Самарского университета, 2021. – 68 с.
2. Yang T., Wei Y., Han J., Chen Z. Research on stress through photoelastic experiment and finite element method considering sliding wear // Journal of Measurements in Engineering. – 2024.–Vol. 12.– No. 2.– P. 324–332.
3. Zhu, T., Chen, J., Xu, Y. et al. Biomechanical behavior of tilted abutment after fixed partial denture restoration of CAD/CAM materials. // BMC Oral Health. – 2024 (24). – P. 1128.
4. Ландсберг Г. С. Оптика. Изд. 6-е. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
5. Фрохт М. М. Фотоупругость. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 432 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТЖИГА НА ФОРМИРОВАНИЕ НАНОЧАСТИЦ ЗОЛОТА В СИЛИКАТНОМ СТЕКЛЕ ПОСЛЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

С.С. Суркова, Г.А. Немцев, М.Р. Шмидт, П.Д. Шульга, О.А. Подсвиров, Д.А. Соколова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ sofiaamst03@gmail.com

Введение. Металлические плазмонные наночастицы применяются в интегральной оптике как плазмонные волноводы, оптические фильтры, носители для записи оптической информации, а также в качестве активной среды для сверхбыстрых оптических переключателей [1-3]. Металлические наночастицы могут формироваться в стекле как непосредственно в процессе его синтеза в восстановительных условиях [4], так и с использованием методов ионной имплантации [5], ионного обмена с последующей термообработкой [6], фототермоиндуцированной кристаллизации [4,7], лазерного облучения в сочетании с термообработкой стекла [3], а также посредством электронно-лучевого воздействия [8,9]. Нас интересует последний метод, так как благодаря нему можно локально сформировать наночастицы металла диаметром 5–10 nm.

Основные механизмы формирования металлических наночастиц в стеклах под действием электронного облучения включают следующие процессы [9]: (i) образование области отрицательного объемного заряда под поверхностью стекла вследствие торможения быстрых электронов; (ii) миграция подвижных положительных ионов металла в область отрицательного заряда; (iii) восстановление ионов металла до нейтрального состояния с участием термализованных электронов; (iv) образование металлических наночастиц из восстановленных до нейтрального состояния атомов металла.

Целью настоящей работы было экспериментально выявить зависимость формирования наночастиц золота в силикатных стёклах, с нанесенной тонкой пленкой золота, от температуры обжига после электронного облучения.

Методическая часть. Ранее, было продемонстрировано образование наночастиц благородных металлов и меди в приповерхностном слое силикатных стекол с различными примесями в процессе электронного облучения (ЭО) с последующей термообработкой (ТО) [10]. В настоящей работе, для проведения исследования использовалось силикатное стекло состава: $\text{SiO}_2\text{-Na}_2\text{O-CaO}$ толщиной 0,45 мм. На него был нанесен слой Au толщиной 14 нм с помощью термического напыления. ЭО производилось на модифицированной установке высокоточного электронного микроскопа JEBD-2 производства японской фирмы JEOL. Энергия электронов составляла $E=20\text{кэВ}$, доза электронного облучения $Q=50\text{млКл/см}^2$, плотность тока $j=100\text{мкА/см}^2$. Были проведены ЭО с одинаковыми параметрами электронного пучка. После этого, золотую пленку удалили с использованием водного раствора смеси йодида калия и йода (KI+I_2) при комнатной температуре. Далее, образец был разделен на 2 части, включающих облученные области, которые были отправлены на термообработку при разных температурах в течении 1 часа в муфельных печах (Nabertherm) с программным управлением. Температура отжига составляла 500 и 590°C. Стоит отметить что температура стеклования данного типа стекла составляет примерно 550°C. Спектральные измерения проводились на спектрофотометре Lambda-650 (Perkin Elmer) в видимом диапазоне длин волн при комнатной температуре. Вычисление глубины проникновения электронов было произведено с использованием программы CASINO методом Монте-Карло.

Экспериментальные результаты и обсуждение. Эксперименты показали, что после электронного облучения исходно прозрачные образцы в облученной зоне приобретают красно-коричневую окраску. В работе [10] было показано, что после ЭО и до ТО в облученных

областях при таких же параметрах образуются молекулярные кластеры (МК) золота в приповерхностной области стекла. Также в работе [10] было показано, что металлические МК образуют металлические наночастицы после ТО при 550°C в течение 1 ч. В данной работе ТО проводилась при температурах 500 и 590°C. При каждой температуре произошли видимые изменения облученных областей. При 500°C цвет облученной области стал менее интенсивным. При 590°C достаточно однородная по цвету область преобразовалась в «узор» фрактальной размерности, на котором отчетливо виден золотой и фиолетовый цвет, что показано на вставке к рисунку 1.

На рисунке 1 приведены спектры оптической плотности, из которых видно, что интенсивность поглощения при ТО 500°C (кривая 2) увеличивается по сравнению с необлученной областью (кривая 1). Сравнение с ранее полученными данными [11] позволяет сделать вывод, что основной вклад в поглощение в данном случае вносят субнанометровые молекулярные кластеры золота. Из чего можно сделать вывод, что для данных параметров электронного пучка, ТО при 500°C в течение 1ч не достаточно для образования наночастиц золота. ТО при 590°C, что выше температуры стеклования, приводит к появлению двух полос поглощения (кривая 3) на $\lambda=410\text{nm}$ и $\lambda=530\text{nm}$. Полоса поглощения с максимумом на 530nm соответствует плазмонному резонансу в видимой области спектра сферических наночастиц золота размером меньше 20nm [12,13], которые образовались в приповерхностной области стекла после ЭО пленочной структуры из золота нанесенной на стеклянный образец и ТО. В исходном силикатном стекле также присутствовали подвижные ионы натрия. Согласно [14], спектральное положение полосы плазмонного резонанса металлических наночастиц натрия может находиться в спектральном диапазоне 380–500nm в зависимости от показателя преломления окружающей матрицы-хозяина, поэтому можно сделать вывод, что менее интенсивная полоса поглощения на длине волны 410nm соответствует плазмонному резонансу наночастиц натрия.

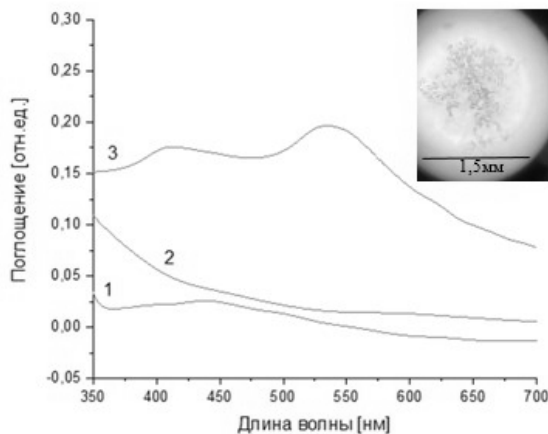


Рис. 1. Спектр оптической плотности молекулярных кластеров и наночастиц золота, наночастиц натрия. 1- до ЭО, 2 – после ЭО и ТО при 500°C, 3 – после ЭО и ТО при 590°C, вставка – область после ЭО и ТО при 590°C

Для вычисления глубины проникновения электронов использовалась программа CASINO, где были смоделированы 200000 электронов с энергией 20кэВ. В этой программе моделируются неупругие столкновения электронов с атомами образца при заданной начальной энергии на момент проникновения электрона в глубь образца. Направление движения электрона после столкновения и его энергия определяются вероятностными распределениями. Вычисления продолжаются до тех пор, пока энергия не упадет ниже пороговой.

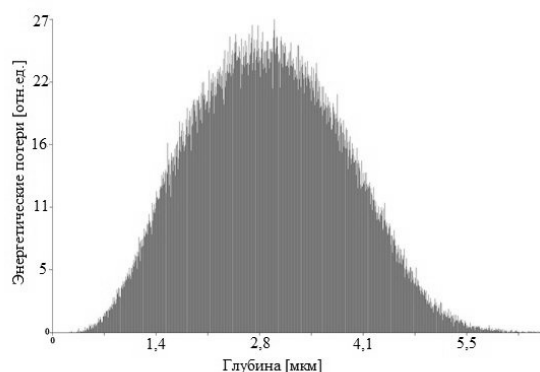


Рис. 2. Распределение поглощенной энергии электронов по глубине при ЭО с $E=20\text{кэВ}$

Из рисунка 2 видно, что электроны проникают в образец на глубину примерно до 5,5 мкм. Пик энергетических потерь приходится на диапазон 2-4 мкм.

Закключение. В данной работе показано влияние температуры отжига на формирование наночастиц золота в приповерхностном слое силикатного стекла после электронного облучения. Экспериментально было показано, что при температуре отжига (500°C) меньше температуры стеклования наночастицы не образуются. Но на глубине 5 мкм при температуре (590°C), которая больше, чем температура стеклования помимо наночастиц золота, ионы которых во время ЭО мигрируют в приповерхностную область стекла из пленки, образуются наночастицы натрия, ионы которого мигрируют в приповерхностную область из объема стекла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zayats A.V., Smolyaninov I.I., Maradudin A.A. // Phys. Rep. 2005. Vol. 408. P. 131–314.
2. Hache F., Ricard D., Flytzanis C. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. Vol. 3. N 12. P. 1647–1655.
3. Taylor A.B., Michaux P., Mohsin A.S.M., Chon J.W.M. // Opt. Express. 2014. Vol. 22. P. 13234–13243.
4. Silver nanoparticles / Ed. by D.P. Perez. Croatia. Vukovar: In-Tech, 2010. 334 p.
5. Stepanov A.L. // Rev. Adv. Mater. Sci. 2003. Vol. 4. P. 45.
6. Sgibnev E.M., Ignatiev A.I., Nikonorov N.V., Efimov A.M., Postnikov E.S. // J. Non-Cryst. Sol. 2013. Vol. 378. P. 213–226.
7. Dubrovina V.D., Ignatiev A.I., Nikonorov N.V., Sidorov A.I., Shakhverdov T.A., Agafonova D.S. // Opt. Mater. 2014. Vol. 36. P. 753–759.
8. Podsvirov O.A., Ignatiev A.I., Nashchekin A.V., Nikonorov N.V., Sidorov A.I., Tsekhomskii V.A., Usov O.A., Vostokov A.V. // Nucl. Inst. Meth. Phys. Res. B. 2010. Vol. 268. P. 3103.
9. Игнатьев А.И., Нащекин А.В., Неведомский В.М., Подсвилов О.А., Сидоров А.И., Соловьев А.П., Усов О.А. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 5. С. 75.
10. Sokolova D., Podsvirov O., Sidorov A. Effect of Electron Irradiation on Optical Properties of Sodium Silicate Glass with Silver, Copper and Gold Films // 2024 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). – IEEE, 2024. – С. 335-338.
11. Eichelbaum M., Rademann K., Hoell A., Tatchev D.M., Weigel W., Stoßer R., Pacchioni G. Nanotechnology. – 2008. – Vol. 19. – P. 135701.
12. Климов, В.В. Наноплазмоника / М.: Физматлит, 2009. – 480 с.
13. Kreibitz U. Optical properties of metal clusters // Berlin: Springer-Verlag, 1995. – P. 532.
14. Bochkareva, E. S., Nikonorov, N. V., Podsvirov, O. A., Prosnikov, M. A., & Sidorov, A. I. (2015). The Formation of Sodium Nanoparticles in Alkali-Silicate Glass Under the Action of the Electron Beam and Thermal Treatments. Plasmonics, 11(1), 241–246. doi:10.1007/s11468-015-0046-8.

ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ В ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТАХ НА ОСНОВЕ ТЕРМОПЛАСТИЧНОГО ПОЛИУРИТАНА И ОДНОСТЕННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Д.Н. Тонков¹, Н.А. Грозова¹, И.А. Кобычно¹, В.Э. Гасумянц^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

✉ wtk_dima@mail.ru

Проводящие полимерные композиты, состоящие из полимерной матрицы с внедрёнными в нее частицами наполнителя, интересны как с фундаментальной [1], так и с практической точки зрения [2]. Особый интерес представляют полимерные композиты на основе углеродных нанотрубок (УНТ) в качестве наполнителя, т.к. этот вид наполнителя способен улучшать как проводящие, так и механические свойства [3]. Важным этапом исследования полимерных композитов является определение порога перколяции (критической концентрации наполнителя, меньше которой композит теряет проводимость) и размерности проводящей сетки, что и является целью данной работы.

Для определения порога перколяции и размерности проводящей сетки были изготовлены образцы из термопластичного полиуритана (TPU) и одностенных УНТ по методике, описанной в [4], с диапазоном массовой доли УНТ от 0.05 масс. % до 1.00 масс. %.

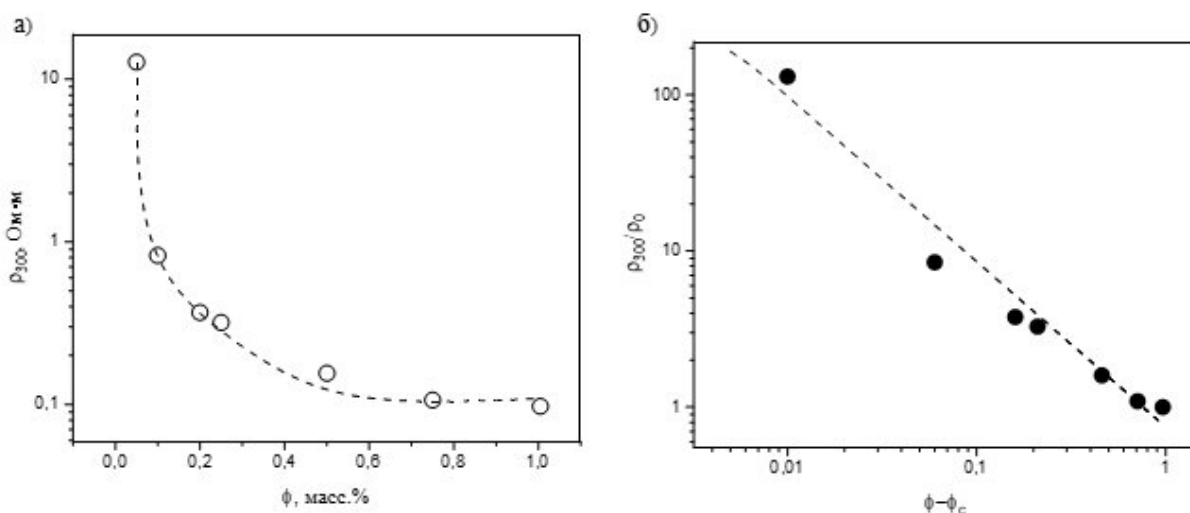


Рис. 1. а) Зависимость удельного сопротивления исследуемых композитов от массовой доли УНТ; б) Зависимость относительного сопротивления ρ/ρ_0 от $\phi - \phi_c$ в логарифмическом масштабе

На рис. 1а в полулогарифмическом масштабе приведена зависимость удельного сопротивления при комнатной температуре ρ_{300} композитных пленок с разным массовым содержанием УНТ, от 0.05 до 1.00 масс. %. С увеличением массовой доли УНТ от 0.05 масс. % до 0.10 масс. % происходит резкое снижение сопротивления. Дальнейшее увеличение массовой доли от 0.10 до 0.50 масс. % приводит к постепенному уменьшению значения ρ_{300} , а в диапазоне от 0.75 до 1 масс. % сопротивление меняется слабо, что свидетельствует об образовании в данном диапазоне сплошного проводящего кластера частиц наполнителя.

Удельное сопротивление случайной сетки проводящих частиц в диэлектрической матрице описывается перколяционной формулой $\rho = \rho_0 (\phi - \phi_c)^{-t}$, где ρ_0 – удельное сопротивление сплошной сетки, ϕ_c – порог перколяции (значение концентрации наполнителя,

ниже которого проводимость пропадает) и t – критический индекс проводимости, определяющийся размерностью сетки проводящих частиц. Значение критического индекса проводимости определяется по наклону линейной зависимости $\lg(\rho/\rho_0)$ от $\lg(\phi-\phi_c)$ (рис. 1б). Этот индекс принимает значения ~ 1.3 и ~ 2 для двумерной и трехмерной сетки проводников соответственно. Для композитов с УНТ характерен диапазон критического индекса проводимости от 1.2 до 4 [5, 6]. Такой разброс в значениях критического индекса связан с локальными нарушениями размерности образованной сетки сопротивлений, которые вызваны закручиванием УНТ. Критический индекс проводимости для исследуемых нами композитов оказался равным ~ 1.1 при пороге перколяции, равном ~ 0.04 масс. %, что, скорее всего, свидетельствует о преимущественно плоской структуре образованной сетки проводящих частиц наполнителя.

Дополнительно были измерены температурные зависимости удельного сопротивления в диапазоне температур от ~ 77 до 300 К. Удельное сопротивление всех композитов возрастает при понижении температуры, при этом степень этого роста увеличивается с уменьшением содержания УНТ. Анализ этих зависимостей показывает, что в композитах реализуется моттовский режим проводимости с переменной длинной прыжка, при этом наблюдается увеличение энергии активации прыжков с уменьшением массовой доли УНТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rudenko R., Voitsihovska, O.O., Abakumov A., Nikolenko A., Poroshin V.M. Effect of carbon nanotubes on the electrical properties of ternary PVDF/PANI/MWCNT nanocomposite in a wide temperature range of 4.2–340 K // *Diamond and Related Materials*. – 2024. – Vol. 143. – P. 110924.
2. Zhan C., Yu G., Lu Y., Wang L., Wujcikb E., Wei S. Conductive polymer nanocomposites: A critical review of modern advanced devices // *Journal of Materials Chemistry C*. – 2017. – Vol. 5 (7). – P. 1569–1585.
3. Spitalsky Z., Tasis D., Papagelis K., Galiotis C. Carbon Nanotube-polymer composites: Chemistry, processing, mechanical and electrical properties // *Progress in Polymer Science*. – 2010. – Vol. 35 (3). – P. 357–401.
4. Тонков Д.Н., Грозова Н.А., Кобыхно И.А., Гасумянц В.Э., Алгушаева А.В., Хуснутдинов Р.Ф. Механизмы проводимости в полимерных нанокомпозитах на основе углеродных нанотрубок и термополиуретана // *Неделя науки ИЭиТ: материалы Всероссийской конференции*. – СПб.: Политех-пресс, 2024. – С. 170–172.
5. Bouhofer W., Kovacs J.Z. A review and analysis of electrical percolation in carbon nanotube polymer composites // *Composites Science and Technology*. – 2009 – Vol. 69 (10). – P. 1486–1498.
6. Eletsii A.V., Knizhnik A.A., Potapkin B.V., Kenny J.M. Electrical characteristics of carbon nanotube-doped composites // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. – 2015. – Vol. 58 (3). – P. 209–251.

ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

А.Е. Шитов^{1,2}, Н.Ю. Михайлин¹, Д.В. Шамшур¹, М.П. Волков¹, Ю.А. Кумзеров¹

¹Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе РАН

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ a.shitov@mail.ioffe.ru

Сверхпроводящие свойства многосвязных систем наноразмерных проводников представляют интерес в связи с развитием сверхпроводниковой электроники в сторону уменьшения характерного размера и увеличения числа элементов. В таких системах могут наблюдаться классические и квантовые эффекты, связанные с уменьшением характерного размера частиц проводника. Ожидается, что свойства сверхпроводника радикально изменятся, когда его размер станет сопоставим с размером куперовских пар ξ , квазичастиц, ответственных за сверхпроводимость.

Наноструктурирование сверхпроводников I рода может приводить к изменению критических параметров сверхпроводящего состояния, а при взаимодействии с внешним магнитным полем к возникновению эффектов, связанных с проникновением и захватом магнитного потока в элементах структуры и, как следствие, проявлению свойств сверхпроводников II рода [1]. Критическое термодинамическое магнитное поле в сверхпроводниках I рода H_C , которое в первом приближении для сверхпроводников II рода равно $H_C = (H_{C1}H_{C2})^{1/2}$, будет связано с H_{C2} через параметр Гинзбурга-Ландау $\kappa = \lambda/\xi$, как $H_{C2} = \kappa_{\text{eff}}/\kappa H_C$ [2].

При наноструктурировании наблюдается смещение характерной частоты фононов к более низким энергиям в сравнении с объемной [3]. Смягчение фононного спектра приводит к увеличению силы электрон-фононного и, как следствие, увеличению критической температуры T_C [4]. Рост T_C будет ограничиваться квантово-размерными эффектами в наноструктурах и силой электрон-фононного взаимодействия сверхпроводника. Размерное изменение критической температуры T_C и магнитного поля H_C в наноструктурированных опалах и пористых стеклах обсуждается в [5-7].

При взаимодействии сверхпроводящих наноструктур с внешним магнитным полем возникают эффекты, связанные с проникновением и захватом магнитного потока в элементах структуры, в частности, гистерезис на зависимости намагниченности от внешнего магнитного поля $m(H)$ [6, 7]. В сверхпроводящих наноструктурах могут наблюдаться скачки магнитного потока [1] – особенности, вызванные лавинообразным проникновением магнитного поля в объем сверхпроводящей наноструктуры. Такие явления характерны для сверхпроводников II рода с сильным пиннингом, но в наносистемах они связаны с формированием градиента магнитного потока в системе взаимосвязанных контуров, а не с пиннингом вихрей на неоднородностях, как в объемных сверхпроводниках.

Вследствие взаимосвязанности контуров в трехмерной сети резкое изменение тока в одном контуре может привести к перераспределению токов во всей сети, способствуя процессу терромагнитной неустойчивости и вызывая полный скачок потока. В работе [8] скачки потока в наноструктуре обсуждались с использованием модели адиабатического критического состояния [9], которая была разработана для сверхпроводников II рода с сильным пиннингом. Модель адиабатического критического состояния предполагает, что скачки магнитного потока сопровождаются выделением тепла в образце. Выделение тепла, вызванное процессом терромагнитной неустойчивости, непосредственно наблюдалось нами путем измерения адиабатического изменения температуры в образце во время развертки магнитного поля. Форма и размер сверхпроводящих частиц также могут влиять на

проникновение и захват магнитного потока [5]. Размер элемента структуры в нанокompозите может допускать захват потока в отдельных элементах. Эффекты, характерные для низкоразмерных сверхпроводников, такие как проскальзывание фаз, могут являться вероятным ограничивающим фактором для критического тока в нанокompозите.

Возможной причиной квазипериодических скачков на кривой намагничивания 3D-сеток является эффект согласования — совпадение потока через область контура с целым числом квантов потока. Скачки такого рода наблюдались для субмикронных сверхпроводящих дисков [10-12], в которых размеры структур были одного порядка с характерными длинами сверхпроводящего состояния. Модель, связывающая появление скачка на магнитолевой зависимости намагниченности и осцилляций Литтла-Паркса с размерами структуры была предложена Геймом [12]. В сверхпроводящем состоянии по мере увеличения диаметра алюминиевого диска ($0.25 \mu\text{m} - 1.2 \mu\text{m}$) при длине когерентности $\xi = 0.25 \mu\text{m}$ зависимость намагниченности от магнитного поля будет сменяться с плавного гистерезиса при $r < \xi$ к возникновению скачка, связанного с фазовым переходом первого рода, при $r \approx \xi$ и переходу к возникновению пилообразных осцилляций на прямом и обратном ходе при $r > \xi$.

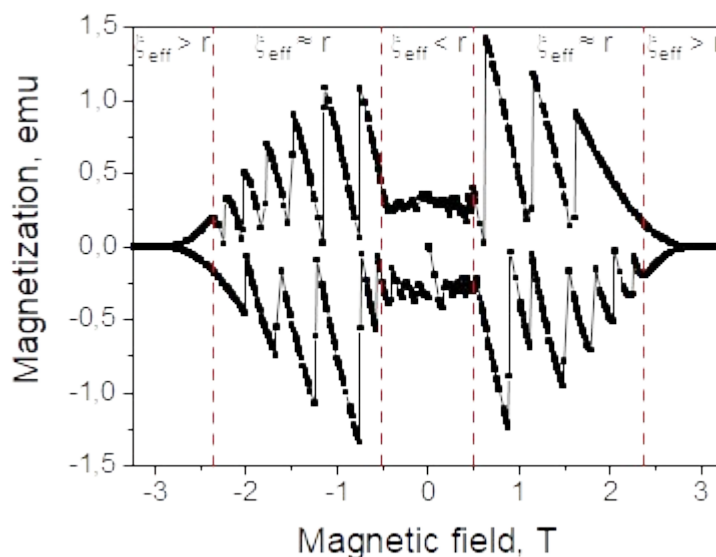


Рис. 1. Зависимость намагниченности от магнитного поля наноструктурированного свинца в пористом стекле с характерными размерами пор $d = 7 \text{ nm}$ при температуре $T = 2 \text{ K}$

В трехмерных системах со случайно ориентированной многосвязной сетью сверхпроводящих нитей, образующих контуры различных размеров и ориентаций, соотношение между размером контура и эффективным размером куперовской пары ξ_{eff} может влиять на поведение структуры во внешнем магнитном поле. На рис. 1 представлена магнитолевая зависимость намагниченности свинцовых нанонитей в пористом стекле с диаметром пор $d = 7 \text{ nm}$ при температуре $T = 2 \text{ K}$. Длину когерентности наноструктурированного свинца можно определить из второго критического магнитного поля H_{C2} , как $\xi(T) = \frac{\phi_0}{2\pi H_{C2}(T)}$, при заданной температуре она будет равна $\xi_{\text{eff}} \approx \xi = 9.5 \text{ nm}$, а радиус сверхпроводящего контура определить из параметров структуры $r \approx 10.75 \text{ nm}$. На данном графике можно выделить 3 характерные области, возникающие при росте магнитного поля: область скачков с малой амплитудой, область скачков с большой амплитудой, область без скачков. Данное явление может быть связано с ростом ξ_{eff} при увеличении внешнего магнитного поля [13] при постоянном r . Связь наблюдаемых скачков магнитного потока в наноструктурах на основе сверхпроводящего металла в пористых диэлектрических матрицах

Секция 2. Физика и науки о материалах

с соотношением ξ_{eff}/r была обнаружена нами в системах с различными размерами контура при различных температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shitov A. E., Mikhailin N. Y., Kumzerov Y. A., et al., Thermomagnetic instabilities in 3D network of superconducting lead nanofilaments in porous glass, Phys. Scri. 98 (2023) 015835, doi: [10.1088/1402-4896/acab95](https://doi.org/10.1088/1402-4896/acab95)
2. Shitov A. E., Mikhailin N. Y., Kumzerov Y. A., et al., Low-temperature heat capacity of nanostructured lead in porous glass, Physica B: Condensed Matter 706 (2025) 417118, doi: [10.1016/j.physb.2025.417118](https://doi.org/10.1016/j.physb.2025.417118)
3. Lozano D. P., Couet S., Petermann C., et al., Experimental observation of electron-phonon coupling enhancement in Sn nanowires caused by phonon confinement effects, Phys. Rev. B 99 (2019) 064512, doi: [10.1103/PhysRevB.99.064512](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.064512)
4. Prischepa S. L., Kushnir V. N., Phonon softening in nanostructured phonon-mediated superconductors (review), J. Phys.: Condens. Matter 35 (2023) 313003, doi: [10.1088/1361-648X/acc6ae](https://doi.org/10.1088/1361-648X/acc6ae)
5. Bose S. and Ayyub P. A review of finite size effects in quasi-zero dimensional superconductors. Rep. Prog. Phys. 77 116503 (2014), DOI: [10.1088/0034-4885/77/11/116503](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/11/116503)
6. Mikhailin N. Y., Galperin Y. M., Kozub V. I. et al., Low-temperature magnetic properties of superconducting indium nanocomposites in opal matrix J. Exp. Theor. Phys. 60 (2019) 1942-1947, doi: [10.1134/S1063776119040034](https://doi.org/10.1134/S1063776119040034)
7. Tien C., Charnaya E. V., Xing D. Y. et al., Vortex avalanches in a Pb-porous glass nanocomposite. Phys. Rev. B 83, 014502, 2011. doi: [10.1103/PhysRevB.83.014502](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.014502)
8. Tien C., Pirozerskii A. L., Charnaya E. V. et al., Magnetization jumps in a lead-porous glass composite: experiment and simulation J. Appl. Phys. 109 (2011) 053905, doi: [10.1063/1.3554663](https://doi.org/10.1063/1.3554663)
9. Swartz P. S. and Bean C. P. A model for magnetic instabilities in hard superconductors: the adiabatic critical state J. Appl. Phys. 39 (1968) 4991–4998, doi: [10.1063/1.1655898](https://doi.org/10.1063/1.1655898)
10. Geim A. K., Dubonos S. V., Palacios J. J. et al., Fine Structure in Magnetization of Individual Fluxoid States, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 1528, doi: [10.1103/PhysRevLett.85.1528](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.1528)
11. Geim, A. K., Dubonos, S. V., Grigorieva, I. V. et al., Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors. Nature 407 (2000) 55–57, doi: [10.1038/35024025](https://doi.org/10.1038/35024025)
12. Geim, A. K., Grigorieva, I. V., Dubonos, S. V. et al., Phase transitions in individual sub-micrometre superconductors. Nature 390 (1997) 259–262, doi: [10.1038/36797](https://doi.org/10.1038/36797)
13. Belova P., Safonchik M., Traito K. B. et al., Coherence length of magnetic field in the mixed state of type-II superconductors, J. Phys.: Conf. Ser. 303 (2011) 012114, doi: [10.1088/1742-6596/303/1/012114](https://doi.org/10.1088/1742-6596/303/1/012114)

МОДЕЛЬ НАГРЕВА И РАЗРУШЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Д.С. Шмыр, Т.А. Андреева, Н.Ю. Быков, В.В. Захаров, А.Я. Лукин
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 ✉ *shmyr.ds@edu.spbstu.ru*

Задача о нагреве и разрушении пористой среды имеет непосредственное отношение к исследованию комет. Кометы представляют собой малые тела Солнечной системы, состоящие из смеси различных льдов и твердых частиц [1]. На большей части траектории своего движения кометы не активны. С приближением к Солнцу под действием солнечного излучения поверхностный слой кометного ядра нагревается, продукты сублимации льдов расширяются в окружающее пространство, унося с ядра частицы пыли. Предполагается, что состав кометного ядра сохранился практически неизменным с момента его образования в протопланетном диске и поэтому содержит информацию о первородном веществе. Исследование состава и структуры кометных ядер имеет важное значение для понимания эволюции Солнечной системы.

Формирование газопылевой атмосферы начинается с процессов, протекающих в приповерхностном слое ядра. Согласно современным представлениям, структура слоя является пористой. Сам приповерхностный слой, в свою очередь, может состоять из различных “субслоев” – мантии (“сухого” слоя, не содержащего льды), и слоев с разным соотношением льдов (воды, монооксида и диоксида углерода и др.). Нагрев кометного ядра ведет к объемной сублимации льдов внутри пор, диффузии летучих соединений к поверхности, сопровождающейся разрушением (эрозией) верхнего субслоя. Результатом совокупности указанных процессов является генерации газопылевого потока с поверхности кометного ядра в космическое пространство.

В настоящее время существует ряд моделей нагрева поверхности кометного ядра [2,3]. Компьютерные расчеты на базе классических моделей предсказывают давления в поверхностном слое, недостаточное для его разрушения. Целью настоящей работы является развитие тепловой модели слоя, учитывающей особенности пористой структуры [4], и соответствующей модели разрушения.

Для описания прогрева элемента поверхности используется уравнение теплопроводности с источником членом, описывающее нестационарный процесс распространения тепла [5]:

$$\beta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - Z \frac{\partial T}{\partial x} - J(T) \quad (1)$$

$$\beta = \rho_{dust} \psi_{dust} c_{dust} + \sum_i \rho_{ice,i} \psi_{ice,i} c_{ice,i} + \sum_i n_{gas,i} c_{gas,i} \quad (2)$$

$$Z = \sum_i c_{gas,i} g_i \quad (3)$$

Здесь t – время, x – координата, отсчитываемая от поверхности вглубь ядра, T – температура, ρ , c , λ – плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности поверхностного слоя ядра, J – слагаемое, описывающее затраты энергии на процесс сублимации льда в объеме слоя, g – поток диффундирующих по порам молекул. Индекс *dust* относится к пыли, *ice* – лед, *gas* – газ сублимированных молекул, i – номер компонента (лед или соответствующий ему газ). ψ – объемная доля компонента, n – концентрация газа. Выражение (1) предполагает равенство температур всех компонентов.

На поверхности должно выполняться следующее балансовое соотношение:

$$I_0 \left(\frac{r_H}{1ae} \right)^{-2} (1 - A) \cdot \max(\cos \nu, 0) = \varepsilon \sigma T_S^4 - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (4)$$

Секция 2. Физика и науки о материалах

где I_0 – мощность солнечного излучения на расстоянии 1 ае от Солнца, r_H – расстояние кометы от Солнца в астрономических единицах, A – альбедо поверхности, ν – угол между направлением на Солнце и внешней нормалью к поверхности для данного единичного элемента поверхности, ε – степень черноты, σ – постоянная Стефана-Больцмана, индекс S относится к поверхности.

На достаточно большой глубине H (внутренней границе расчетной области) тепловой поток отсутствует:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=H} = 0. \quad (5)$$

Для каждого летучего компонента записывается уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_{gas,i}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} g_i + q_i, \quad (6)$$

где g_i – диффузионный поток, q_i – источниковый член, учитывающий сублимацию и конденсацию молекул в объеме пор. Для типичных условий кометного ядра, взаимных столкновений молекул внутри пор практически нет, и диффузия соответствует кнудсеновскому режиму [6]

$$g_i = - D_i^{ch} \frac{\partial (n_i \sqrt{T})}{\partial x}, \quad D_i^{ch} = \frac{1}{3} (1 - \psi_{dust} - \sum_i \psi_{ice,i}) d \left(\frac{8k}{\pi m_i} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где d – характерный размер пор. Учитывается зависимость параметра β от температуры, теплопроводности среды λ от состава, структуры пор и температуры. Особенностью модели является возможность учета доли “закрытых” пор.

Разрушение части слоя, непосредственно примыкающей к поверхности возможно в случае превышения давления газа в порах порогового напряжения, соответствующего разрушению пористой среды.

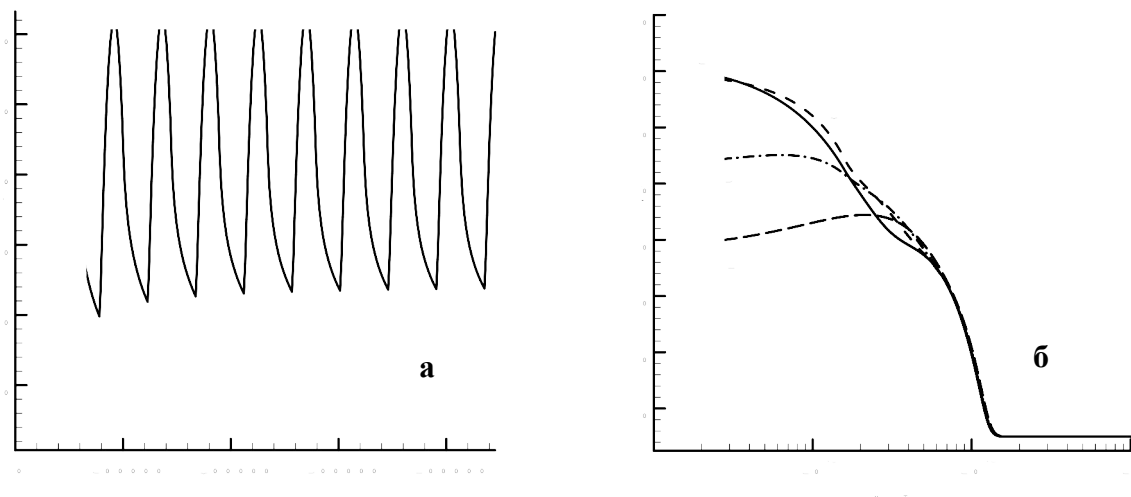


Рис.1. Изменение температуры поверхности кометного ядра (а) и распределение температуры по глубине (б) в моменты времени, соответствующие следующим значениям зенитного угла: 1 – $\nu = 0$, 2 – $\nu = \pi/4$, 3 – $\nu = \pi/2$, 4 – $\nu = \pi$

На рисунке 1 представлены результаты расчетов для упрощенной постановки задачи, предполагающей однокомпонентный лед (H_2O), $\beta = \text{const}$, $g = 0$. Элемент поверхности находится на экваторе ядра, ось ядра перпендикулярна плоскости орбиты, расстояние до Солнца 3.27 ае. Дискретизация уравнения (1) выполнена методом конечных разностей.

Секция 2. Физика и науки о материалах

Используется неявная схема первого порядка точности по времени и второго порядка по пространству.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 24-12-00299.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еленин Л. Кометы. Странники Солнечной системы. – М.: Эксмо, 2024. – 304 с.
2. Bjorn J. R. Davidsson, Yuri V. Skorov. On the Light-Absorbing Surface Layer of Cometary Nuclei. II. Thermal Modeling // Icarus. – 2002. – Vol. 159. – P. 239-258. doi:10.1006/icar.2002.6912.
3. Attree N., Schuckart C., Bischoff D., Gundlach B., Blum J. Localized ejection of dust and chunks on comet 67P/Churyumov–Gerasimenko: testing how comets work // MNRAS. – 2024. – Vol. 535. – P. 65-77.
4. Blum J., Gundlach B., Krause M. et al. Evidence for the formation of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko through gravitational collapse of a bound clump of pebbles // MNRAS. – 2017. – Vol. 469. – P. S755–S773. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2741>
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Вычислительная теплопередача – М. Едиториал УРСС, 2003. – 785 с.
6. К. Хир. Статистическая механика, статистическая теория и кинетические процессы. – М.: Мир, 1976. – 600 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ ОДНООСНОЙ НАГРУЗКИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В КОМПОЗИТЕ Ti_3Al

Е.А. Щепилов¹, О.Г. Комиссаренко¹, У.И. Янковская¹, М.Д. Старостенков²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Алтайский государственный технический университет им. И.И. Полхунова

✉ tshepilov.ea@edu.spbstu.ru

Введение. В современном мире исследование различных интерметаллидов представляет собой важную научную задачу для любого металлурга. Изучение их механических свойств упрощает поиск материалов, которые по своим параметрам лучше подойдут в конкретной области, чем уже существующие аналоги.

Важной характеристикой таких материалов является их масса. Ввиду высокой плотности металлов лёгкие изделия, обладающие заданными прочностными характеристиками, получить из них крайне сложно. Решением данной проблемы являются композиты на основе лёгких металлов, например алюминия, применяемых в конструкционных изделиях, однако он достаточно хрупкий [1].

Для повышения прочности металломатричного композита можно брать не чистый алюминий, а соединения алюминия с другими металлами. Например, в следующих исследованиях были взяты композиты на основе алюминия и меди [2, 3]. В нашем исследовании мы изучим механические свойства одного из соединений алюминидов титана.

Алюминиды титана используются во многих сферах, например в аэрокосмической отрасли. При замене некоторых деталей газотурбинного двигателя можно достичь значительного снижения массы, так как масса этих соединений меньше, чем у используемых на сегодняшний день материалов [4].

На сегодняшний день многие учёные проводили исследования различных свойств алюминидов титан [5, 6].

Проведение натурных исследований алюминидов титана требует существенного материального обеспечения. Для проведения первичных исследований целесообразно применять методы компьютерного моделирования. Так в исследованиях с использованием моделирования результаты удовлетворительно согласуются с полученными экспериментальными данными.

Метод и модели. Нашей задачей является исследование механических свойств (прочность на разрыв и сжатие) алюминида титана Ti_3Al . Исследование образца будем проводить методом компьютерного моделирования в программе LAMMPS, при расчёте модели будем использовать суперкомпьютер так как вычислительной мощности обычных компьютеров не хватает.

Программа LAMMPS использует метод молекулярной динамики при работе со структурами. Метод молекулярной динамики – это метод, в котором взаимодействие атомов или частиц отслеживается при вычислении их уравнений движения. Для описания движения атомов или частиц применяется классическая механика. При моделировании силы межатомного взаимодействия представляют в форме классических потенциальных сил.

Пакет LAMMPS предусматривает широкий набор потенциалов межатомного взаимодействия как для однокомпонентных, так и многокомпонентных систем атомов. Модель кристалла Ti_3Al была построена на основе элементарной ячейки интерметаллида (рисунок 1).

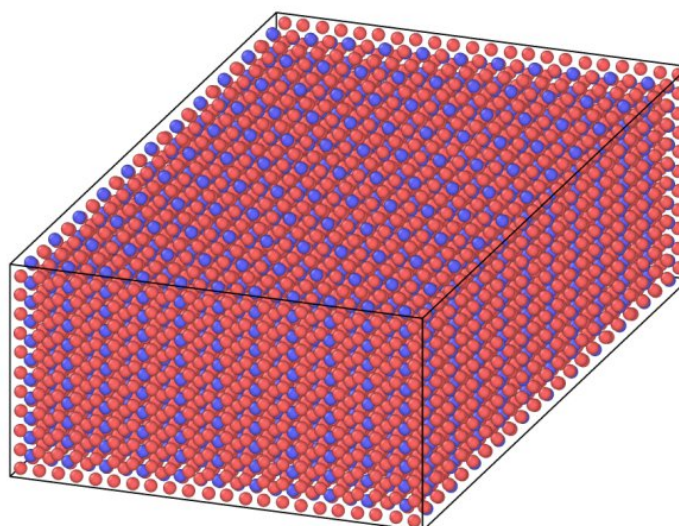


Рис. 1. Модель алюминид титана

Результаты. После создания модели кристалла, выбора нагрузки (сжатие и растяжение), моделирование было проведено при помощи внутренних команд LAMMPS. Моделирование нагрузки проведено на трех скоростях 10^{-8} пс $^{-1}$, 10^{-9} пс $^{-1}$, 10^{-10} пс $^{-1}$. В дальнейшем, при полном вычислении процесса деформации кристалла, мы визуализировали данный процесс с помощью программы OVITO. Также в этой программе можно увидеть, как развивались дефекты, которые появляются в кристаллической решётке, с увеличением деформации материала (рисунок 2).

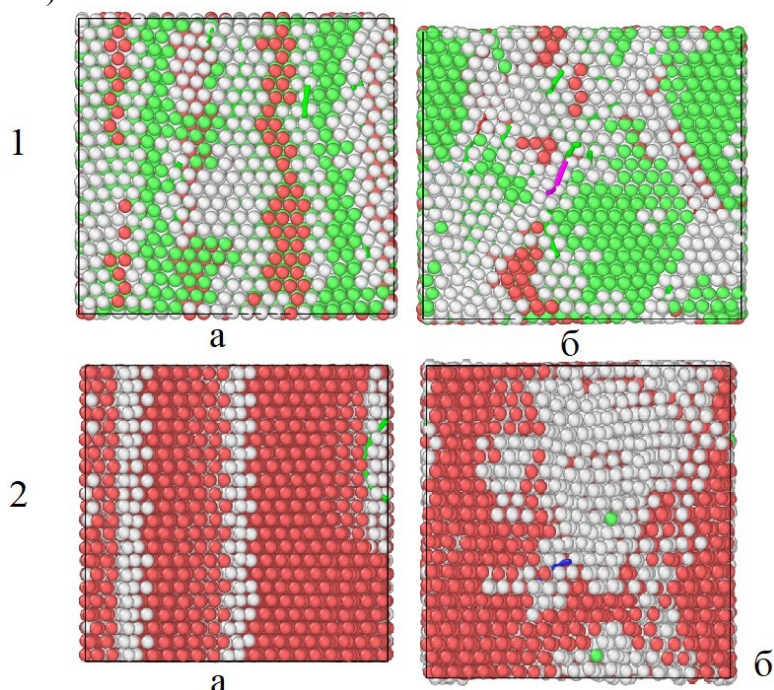


Рис. 2. Развитие дислокаций в кристалле Ti_3Al при одноосной нагрузке: 1 – сжатие (а: $\epsilon = 0,5\%$; б: $\epsilon = 1\%$); 2 – растяжение (а: $\epsilon = 0,5\%$; б: $\epsilon = 1\%$)

Процесс деформации интерметаллида сопровождается формированием дефектных структур и фазовыми перестройками. Такие процессы хорошо видны как при деформации растяжения, так и при сжатии материала. Это отражается на прочностных характеристиках и соответствующие изменения видны на кривых напряжений.

На рисунке 3 представлены кривые напряжения-деформации для растяжения и сжатия композита при различных скоростях.

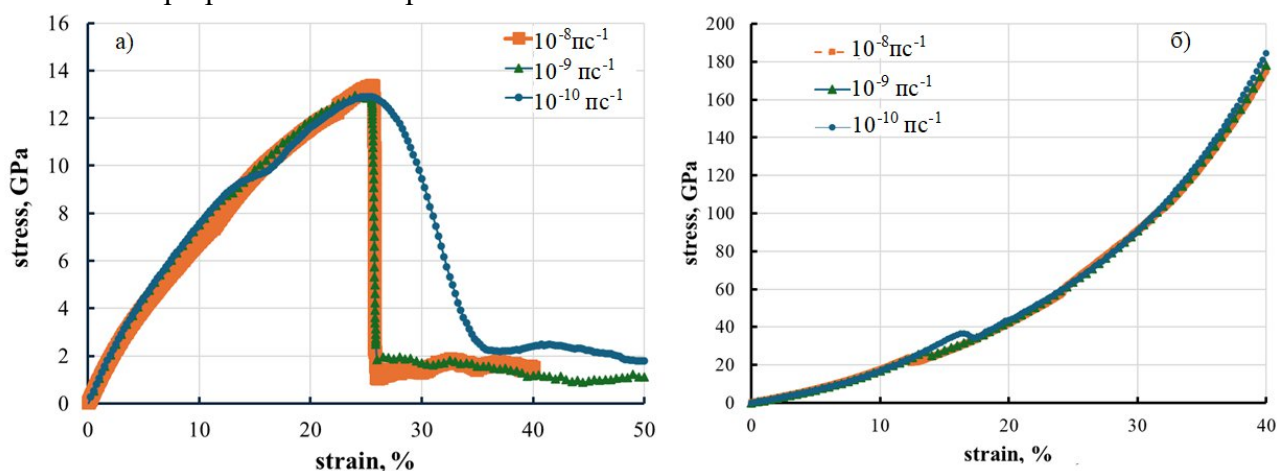


Рис. 3. Кривые зависимости напряжения от деформации: а) растягивающая нагрузка; б) сжимающая нагрузка.

Предел прочности и модуль Юнга являются важными характеристиками композиционного материала. По нашим данным рассматриваемые характеристики увеличиваются с увеличением скорости как для растягивающей, так и для сжимающей нагрузки. Для скоростей 10^{-9} и 10^{-10} с^{-1} изменения для обеих характеристик как при растяжении, так и при сжатии составляет около 2%. При скорости 10^{-8} с^{-1} значение предела прочности и модуля упругости отличаются более чем на 5% от двух других скоростей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-20038 (<https://rscf.ru/project/24-22-20038/>) и гранта Санкт-Петербургского научного фонда № 24-22-20038.

ЛИТЕРАТУРА

1. Watanabe H., Sugioka M., Fukusumi M., Ishikawa K., Suzuki M., Shimizu T. Mechanical and Damping Properties of Fullerene-Dispersed AZ91 Magnesium Alloy Composites Processed by a Powder Metallurgy Route // Materials transactions. – 2006. – Vol. 47 (4). – p. 999–1007. DOI:10.2320/matertrans.47.999.
2. Ваганов В. Е., Евдокимов И. А., Решетняк В. В., Щетинин Ю. В. Наноструктурированные металломатричные углеродосодержащие композиты на основе алюминия и меди // Фазовые превращения и прочность кристаллов: сборник тезисов VIII Международной конференции. – 2014. – № 8. – С. 179.
3. Рудской А. И. Металломатричные нанокомпозиционные материалы Cu–C: синтез // Доклады российской академии наук. химия, науки о материалах. – 2020. – С. 492–493. DOI:10.31857/S2686953520040093.
4. Каблов Д.Е., Панин П.В., Ширяев А.А., Ночовная Н.А. Опыт использования вакуумно-дуговой печи ALD VAR L200 для выплавки слитков жаропрочных сплавов на основе алюминидов титана // Авиационные материалы и технологии. - 2014. - №2 (31).
5. Крюков Д. Б., Гуськов М. С., Гуськов Д. С. Исследование влияния термической обработки на структурные превращения и физико-механические свойства композиционного материала титаналюминий // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2016. – № 1 (17). – С. 290–298.
6. Наумов С. В., Панов Д. О., Черниченко Р. С., МIRONЦОВ В. В., Степанов Н. Д., Жеребцов С. В., Салищев Г. А., 2022

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ В ИЗУЧЕНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

В.М. Дорошенко

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

✉ dorvalentina9@gmail.com

Введение. Современные стандарты ведения образовательного процесса требуют интегрирования в процесс обучения новых методов преподавания, которые, в первую очередь будут нести практико-ориентированную направленность, особенно при изучении технических дисциплин. Важнейшей частью современного образовательного процесса является использование современных программных средств для расчетов, моделирования и визуализации физических процессов. В докладе приведен перечень применяемых программных средств и методических рекомендаций по введению их в практические и лабораторные занятия.

Статья посвящена процессу внедрения современных программных средств в изучение технических дисциплин в рамках практико-ориентированного подхода к подготовке технических специалистов. В докладе рассмотрены основные этапы перехода от классических методов преподавания, к образовательной траектории, в которой больший процент учебных часов отводится на решение реальных инженерных задач с применением современных программных продуктов. Применение описанного метода позволит готовить высококвалифицированные кадры, готовые к началу трудовой деятельности с меньшим временем адаптации на предприятиях.

Основные этапы внедрения программных средств в учебный процесс. Для внедрения современных программных средств в изучение технических дисциплин необходимо учитывать ряд факторов, влияющих на возможность их применения. В первую очередь важно подготовить учебные планы и рабочие программы, чтобы избежать изолированного изучения программных средств. Федеральные государственные стандарты, например: [1,2], принятые на данный момент, подразумевают рост роли практической направленности при получении компетенций и приобретение навыков, применимых в профессиональной деятельности согласно профессиональным стандартам технических специалистов [3]. Таким образом, ключевую роль в формировании образовательной траектории могут взять на себя именно те инструменты, которые приблизят обучающихся к реальным инженерным задачам.

Наилучшим образом интеграция проводится в случае, когда студенты решают реальные проблемы и задачи, CAD-программы можно интегрировать в курсы по черчению и проектированию, а MATLAB — в курсы по математике и физике. Можно внедрять проектный подход, где студенты будут решать не модельные, задачи, а реальные кейсы с помощью программ, например, проектирование моста в SolidWorks или моделирование тепловых процессов в ANSYS.

Кроме учебно-методической части внедрения необходимо также рассмотреть вопросы доступности как вычислительных, так и экономических ресурсов. Применяемое программное обеспечения должно быть доступно и соответствовать тому оборудованию, на котором планируется его установка, если же технической мощности на физических вычислительных машинах не достаточно, можно рассмотреть вариант развертывания программ через удаленный доступ к виртуальным машинам или облачным сервиса. Такой подход можно применить совместно с технологическими партнерами, заинтересованными в образовании технических специалистов.

В докладе также рассмотрены вопросы подготовки кадров для преподавания с применением современных программ в рамках стратегии непрерывного образования

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

педагогов и их поддержки на переходном этапе. Показаны этапы постепенного перехода от классических методов преподавания к новым через внедрение проектной деятельности и организацию онлайн курсов.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-19-68006 (продление 22-19-00357).

ЛИТЕРАТУРА

1. Приказ Министерства образования и науки РФ от 19 сентября 2017 г. N 930 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи" (с изменениями и дополнениями) Редакция с изменениями N 1456 от 26.11.2020
2. Приказ Министерства образования и науки РФ от 19 сентября 2017 г. N 931 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника" (с изменениями и дополнениями) Редакция с изменениями N 1456 от 26.11.2020
3. Реестр профессиональных стандартов // <https://profstandart.rosmintrud.ru/> URL: <https://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/reestr-professionalnykh-standartov/> (дата обращения: 20.03.2025).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ COMSOL MULTIPHYSICS В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Г.В. Ефимова¹, А.А. Морозов¹, А.М. Марченко¹, В.В. Мизина¹, М.П. Фараджева^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе

✉ galinabalerina18@mail.ru

Лабораторный практикум по физике играет важную роль в формировании профессиональных компетенций будущих инженеров. Выполнение лабораторных работ позволяет глубже проникнуть в мир физических явлений, повторить и обобщить пройденный материал, экспериментально проверить некоторые теоретические положения курса, познакомиться с методами измерения физических величин, способствует формированию умений и навыков работы с приборами [1, 2]. Особенно важна роль лабораторного практикума в приобщении студентов к научно-исследовательской работе. Даже в рамках учебных лабораторных работ появляются огромные возможности в проявлении творческого потенциала студентов. Сочетание реального эксперимента и математического моделирования происходящих процессов с использованием пакетов прикладных программ позволяет визуализировать изучаемые явления, более детально рассмотреть процессы, происходящие в ходе выполнения лабораторной работы.

В качестве примера в статье рассматривается одна из работ лабораторного практикума по физике Санкт-Петербургского политехнического университета, предлагаемая к выполнению студентам первого курса технических и физических направлений подготовки «Исследование упругих волн в жидкости» [3]. В основе экспериментальной установки – ультразвуковой интерферометр, в котором упругая волна создается за счет обратного пьезоэлектрического эффекта: при подаче на пьезокристалл электрического напряжения он деформируется, заставляя при этом колебаться частицы жидкости. Целью лабораторной работы является исследование распространения упругих волн в жидкости и определение их характеристик. В ходе работы определяются положения максимумов возникшей стоячей волны, зная которые можно определить длину волны, скорость её распространения и коэффициент сжимаемости жидкости.

Лабораторная работа предлагается к выполнению студентам 1 курса при изучении разделов «Механика. Молекулярная физика и термодинамика». Однако, как показывает практика, большой интерес студентов при выполнении лабораторной работы вызывают не только происходящие колебательные процессы в жидкости, но и пьезоэффект, широко применяемый на практике, изучение которого выходит за рамки названных разделов. В связи с этим возникла идея создания модели пьезоэлемента, используемого в установке, и дополнения теоретической части работы кратким описанием пьезоэффекта и его визуализацией. Идея была реализована студентами 1 курса Физико-механического института, по направлению «Механика и математическое моделирование».

Моделирование процессов в пьезоэлементе проводилось в программной среде COMSOL Multiphysics – интегрированной среде численного моделирования, которая обладает большим разнообразием модулей, широким функционалом, мощным графическим интерфейсом и высокой гибкостью использования. Это делает возможным использовать названное программное обеспечение для моделирования и оптимизации любой физической системы. 3D – модели установок, созданные в COMSOL Multiphysics, позволяют получить наиболее полное представление о работе с оборудованием, и явлениях, наблюдаемых в ходе выполнения лабораторных работ.

Для создания модели пьезоэлемента в программе COMSOL Multiphysics предварительно необходимо задать геометрию объекта; сетку, которая дает численное дискретное значение величин; материал модели, определяющий его физические свойства. Все исходные данные определялись конфигурацией реальной установки [4]: пьезоэлемент заданных размеров спроектирован в форме цилиндра, верхний и нижний торцы которого выполнены в виде отдельных слоев, электрические контакты - прямоугольники с закругленными краями. Следующий шаг - задание сетки (рис.1). Вместо стандартной сетки (600 тыс. элементов) было выбрано более крупное разбиение (50 тыс. элементов). В методе конечных элементов модель разбивается на малые геометрические примитивы — в данном случае на тетраэдры. Далее в каждом тетраэдре с помощью набора полиномиальных функций выполнялась аппроксимация поля смещений, которое показывает деформацию объекта по каждой из трех координатных осей [5]. Были выбраны материалы для геометрических поверхностей модели: боковая поверхность цилиндра и контакты- медные, а торцы из пьезокристалла.

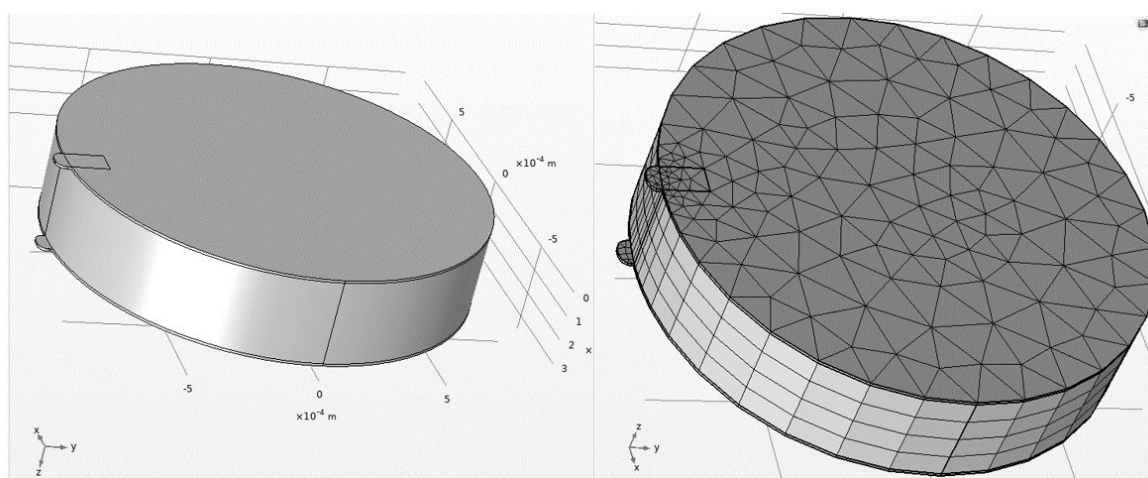


Рис. 1. Геометрия модели (слева) и сетка конечных элементов (справа) с разрешением 50 тыс.

Выполнив все этапы моделирования и проводя расчеты, можно проводить исследования по нескольким направлениям. Во-первых, моделирование в программе COMSOL Multiphysics позволяет наглядно продемонстрировать сам пьезоэффект. Так, на рисунке 2 показана деформация пьезокристалла при подаче напряжения 10В. Видно, как изменилась форма объекта при максимальной амплитуде колебаний.

После построения модели можно запустить расчет и получить резонансную частоту пьезокристалла. Для заданной конфигурации и материала пьезоэлемента она оказалась равной 5,0522 МГц.

Возможности программной среды COMSOL Multiphysics позволяют менять геометрию пьезоэлемента, его материал, конфигурацию контактов, среду, в которой распространяются волны, тем самым изменяя условия проведения эксперимента. Это существенно расширяет возможности лабораторного практикума. Кроме того, изменяя исходные условия математического моделирования, можно подобрать оптимальные режимы проведения реального эксперимента.

Таким образом, применение пакета прикладных программ в лабораторном практикуме по физике позволило визуализировать процессы, происходящие при проведении эксперимента на установке; смоделировать ситуации, которые в реальном эксперименте воссоздать затруднительно. Возможность изменять условия проведения эксперимента, подбирать

оптимальные режимы работы вызывает неподдельный интерес студентов, превращает обычную учебную лабораторную работу в исследовательский проект.

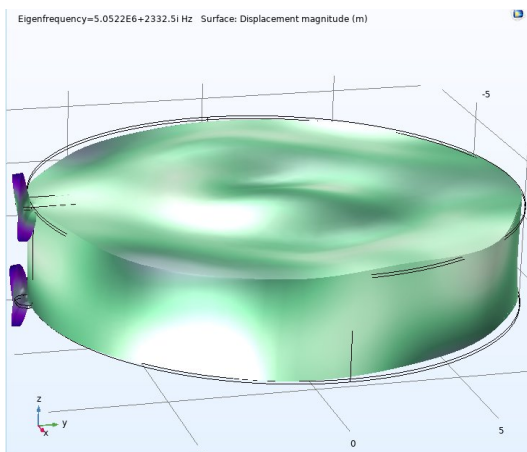


Рис. 2. Деформация пьезокристалла

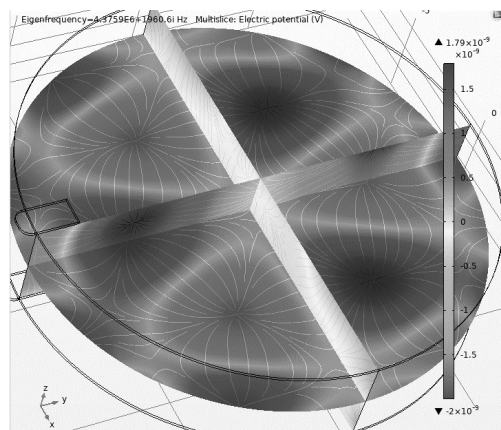


Рис. 3. Распределение электрического потенциала в выбранной геометрии объекта

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (соглашение № 075-15-2024-201 от 6 февраля 2024 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизина, В.В. Лабораторный практикум по физике как средство формирования профессиональных компетенций будущих инженеров / В. В. Мизина, Р. В. Пигулев // Физико-математическое и естественнонаучное образование: наука и школа : Материалы Всероссийской научно-практической конференции преподавателей высшей и средней школы, Йошкар-Ола, 23 апреля 2021 года. – Йошкар-Ола: Марийский государственный университет, 2021. – С. 275-281.
2. Лавренина, А.Н., Леванова Н.Г. Лабораторный практикум по физике в аспекте формирования системы знаний, умений и навыков // Евразийский Союз Ученых. 2015. №6-3 (15).
3. Общая физика. Механика и молекулярная физика: учебно-методическое пособие / [составители: В.В. Козловский, С.Б. Михрин]. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2000
4. Описание лабораторной работы «Исследование упругих волн в жидкости». [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://physics.spbstu.ru/userfiles/files/Lab_1_06D_waves_no_oscillos.pdf (дата обращения: 20.03.2025)
5. Введение в COMSOL Multiphysics. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://cdn.comsol.com/doc/5.4/IntroductionToCOMSOLMultiphysics.ru_RU.pdf (дата обращения: 20.03.2025)

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ НА
ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Е.И. Кокшарова, В.В. Мизина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ lenak12321@yandex.ru

Одной из задач высшего образования является формирование и развитие у студентов навыков научной деятельности [1]. Научно-исследовательская работа студентов способствует развитию системного и критического мышления, учит студентов самостоятельно формулировать цель и задачи исследования; анализировать, систематизировать, обобщать полученные результаты, развивает коммуникативные, организационные и лидерские способности. Необходимые условия для формирования исследовательских компетенций студентов инженерных направлений подготовки складываются на лабораторном практикуме по физике, который является первой ступенью подготовки студентов к дальнейшей научной работе.

Выполнение каждой лабораторной работы по физике проходит в несколько этапов: 1) подготовка к лабораторной работе, заполнение протокола; 2) получение допуска к работе; 3) непосредственное выполнение лабораторной работы на экспериментальной установке; 4) обработка полученных результатов; 5) защита лабораторной работы. Такая же последовательность действий прослеживается и в организации научно-исследовательской работы.

Перед началом работы студенты должны ознакомиться с содержанием методического пособия к лабораторной работе, изучить теоретическое введение по теме исследования, выделить цель исследования, сформулировать задачи. Как правило, цель исследования указана в методическом пособии, а конкретные задачи студенту необходимо сформулировать самостоятельно. Всё это приводится в рабочем протоколе, где нужно указать также объект, методы экспериментального исследования, рабочие формулы. В процессе подготовки рабочего протокола студенту требуется проанализировать содержание методического пособия, критически осмыслить его, при необходимости привлечь материал из дополнительных источников. Этот этап необходим для успешного проведения эксперимента, получения осознанных результатов.

Выполнению работы на экспериментальной установке предшествует «допуск» к работе. Как правило, «допуск» проходит в форме устного опроса, беседы с преподавателем. Обсуждаются вопросы, связанные с целью исследования, особенностями экспериментальной установки, порядком выполнения работы. Здесь студенты учатся грамотно выражать свои мысли, анализировать условия экспериментальных методов исследования, применять знание теоретических законов в конкретных условиях лабораторной работы.

Следующим этапом является непосредственное выполнение лабораторной работы на экспериментальной установке. Студенты с большим интересом относятся к выполнению лабораторного практикума: здесь можно всё покрутить и потрогать, убедиться в справедливости физических законов, увидеть то, о чём говорилось на лекции. Выполнение лабораторных работ способствует более глубокому осознанному освоению теоретического материала.

Однако проведение лабораторных занятий показывает, что, к сожалению, у многих студентов опыт работы в физической лаборатории крайне ограничен или вообще отсутствует. Студенты теряются при работе с приборами, не знают, как включить, как настроить, выбрать оптимальный режим работы даже в простейших ситуациях. Поэтому именно в рамках лабораторного практикума по физике студенты приобретают первые навыки в организации

экспериментальной работы. Конечно, по сравнению с научно-исследовательской работой в научной лаборатории эксперимент, проведённый в учебной лаборатории, ограничен как по времени (расписанием занятий), так и по количеству проводимых измерений; порядок проведения работы описан в методическом пособии, при возникновении сложностей на помощь приходит преподаватель или лаборант. Тем не менее такой первый опыт самостоятельного проведения эксперимента даже в рамках учебной лаборатории способствует формированию навыков работы на экспериментальном оборудовании, с измерительными приборами. Студенты учатся планировать и проводить эксперимент, правильно выбирать необходимый режим работы приборов, шаг измерения. В целом студенты становятся более уверенными при работе с экспериментальным оборудованием, формируется культура экспериментальной работы.

Большое значение при выполнении работы имеет грамотная запись результатов измерений. Как правило, в методическом пособии к каждой лабораторной работе уже есть готовые таблицы, куда необходимо внести полученные значения. Тем не менее студентам следует обратить внимание на единицы измерения, порядок измеряемой величины, на результаты, полученные в разных режимах. В некоторых случаях в методических указаниях таблицы могут отсутствовать, тогда студентам предстоит самостоятельно продумать их оптимальную структуру, чтобы было удобно при дальнейшей обработки результатов. Выполнение лабораторных работ вырабатывает у студентов аккуратность, внимательность, грамотность при оформлении результатов, что немаловажно в будущей научно-исследовательской работе.

Следует отметить и развитие коммуникативных компетенций при выполнении лабораторного практикума. Работа на лабораторном практикуме по физике проходит в малых группах (бригадах) по 2-4 человека. Состав бригад определяется студентами самостоятельно и, как правило, остаётся неизменным до конца семестра. Успешность выполнения работы зависит от организованности такого малого коллектива, умения работы в команде. Кто-то берёт на себя работу с приборами, кто-то записывает результаты, кто-то следит за соблюдением всех необходимых условий. Перед началом работы надо ещё раз обсудить роль каждого члена коллектива, чётко распределить обязанности так, чтобы каждый член бригады выполнял свою посильную функцию, эффективно реализовал свою роль в команде. Часто студенты, не проявившие себя при получении допуска в силу застенчивости или неумения грамотно выражать мысли, берут на себя обязанности по выполнению работы, умело настраивают оборудование, проводят эксперимент, у них лучше получается «работать руками». Таким образом, в ходе лабораторного практикума студенты учатся выстраивать межличностные отношения, рационально распределять обязанности, развиваются коммуникативные компетенции, формируются лидерские качества.

После выполнения лабораторных работ необходимо обработать результаты измерений. Как показывает практика, этот этап становится самым сложным для студентов. Несмотря на использование калькуляторов, возможностей Excel и других специальных средств, часто возникают трудности с проведением громоздких математических вычислений, неумением перевода единиц измерения, округлением промежуточных результатов. В ходе каждой лабораторной работы студенты учатся аккуратно проводить расчёты, внимательно относиться к единицам измерения, представлять результаты в форме, удобной для дальнейшего анализа.

Значительные затруднения вызывает построение графиков исследуемых зависимостей. Для правильного построения графиков, выявления исследуемых зависимостей необходимо руководствоваться рядом правил, которые на лабораторном практикуме по физике отрабатываются до автоматизма: выбор оптимального размера графика, установление величин, откладываемых по осям (часто удобно линеаризовать исследуемую зависимость), выбор масштаба, нанесение экспериментальных точек. Безликие графики, которые

встречались на уроках математики, при выполнении лабораторного практикума по физике наполняются физическим содержанием, позволяющим установить причинно-следственные отношения.

Немаловажным в обработке экспериментальных результатов является оценка погрешности и запись окончательного ответа. Этот этап работы также достаточно сложен для студентов. Вопросы, связанные с оценкой погрешности измерения, в средней школе освещаются мало. Зачастую, школьникам предлагают уже готовую формулу для расчёта погрешности. Более подробно эти вопросы обсуждаются лишь на дополнительных занятиях при подготовке к олимпиадам и турнирам по решению экспериментальных задач. Поэтому перед лабораторным практикумом по физике стоит важная задача по обучению оценке погрешностей измерений. Первая лабораторная работа у всех студентов независимо от направления подготовки, на котором они обучаются, посвящена изучению погрешностей, методам расчёта погрешности прямых и косвенных измерений, правилам округления и записи окончательного результата [2]. В ходе выполнения лабораторных работ по физике студенты учатся анализировать факторы, влияющие на погрешность окончательного результата, учитывать влияние приборной погрешности, оценивать вклад случайной и систематической погрешности и т.д.

Следующим важным этапом в оформлении лабораторной работы является формулирование выводов. Так же, как и в любой научной статье, в конце необходимо проанализировать полученные результаты, обозначить выявленные зависимости, сравнить с общеизвестными фактами и результатами, полученными другими авторами. Этот неотъемлемый этап каждой лабораторной работы по физике приучает студентов к необходимости обобщения и систематизации полученных результатов, грамотной их интерпретации, выделению главных особенностей, развивает навыки письменной речи.

Последним этапом в работе над каждой лабораторной по физике является её защита. Презентация результатов работы, ведение дискуссии и обоснование полученных результатов – важный элемент научно-исследовательской деятельности. Участие в научных конференциях предполагает, что докладчик способен не только выполнить работу, но и представить ее публике. Защищая лабораторную работу, студенты учатся представлять, обосновывать справедливость экспериментальных результатов, выражать и отстаивать свою точку зрения.

Работа над каждым этапом лабораторной работы по физике способствует формированию универсальных компетенций будущего инженера [3]: развивает критическое мышление, умение анализировать и обобщать полученную информацию, способность выстраивать отношения с коллегами для достижения поставленной цели, аргументировать и обосновывать свои результаты. Лабораторные работы по физике развивают практические навыки самостоятельной научно-исследовательской деятельности: умение анализировать научную литературу, планировать и организовывать работу на экспериментальной установке, оформлять, обобщать и систематизировать экспериментальные результаты, анализировать полученные данные, устанавливая функциональные зависимости, формулировать выводы по работе, представлять и отстаивать свои результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чертовских О.О. Научно-исследовательская работа студентов ВУЗа, как важное звено подготовки конкурентоспособного специалиста // Человеческий капитал. – 2023. – № 12 (180). – С. 219-226.
2. Лабораторный практикум Кафедры физики.
https://physics.spbstu.ru/labortornyi_praktikum_kafedry_eksperimentlanoy_fiziki/
3. Портал Образование СПбПУ. Информация по образовательным программам, в том числе адаптированным. <https://www.spbstu.ru/sveden/education/documents-educational-process-educational-organization/>

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ПЕРЕВЕРНУТОМ КЛАССЕ НА ОСНОВЕ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ

Ма Аньхой, Е.Н. Пархоменко

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

✉ parhomenko@msu.by

Введение. В данной статье рассматривается модель преподавания физики в перевернутом классе на основе проблемного обучения в контексте конструктивизма, анализируются ее текущее состояние, проблемы и предлагаются пути улучшения.

С быстрым развитием информационных технологий и постоянным обновлением образовательных концепций традиционная модель обучения больше не соответствует современным требованиям к индивидуализации, интерактивности и глубокому обучению. Перевернутый класс, как новая модель обучения, благодаря изменению порядка передачи знаний и процесса их усвоения, предоставляющая студентам больше времени для самостоятельного обучения и возможности для взаимодействия в аудитории, постепенно становится актуальной темой образовательной среды. Теория конструктивистского обучения подчеркивает активность и социальность обучающегося в процессе построения знаний, утверждая, что знания формируются через взаимодействие между индивидуумом и окружающей средой, а также между индивидуумами. Метод, ориентированный на решение проблем, или Problem-Based Learning (PBL), сочетает процесс обучения с решением реальных проблем, акцентируя внимание на том, что студенты строят знания в реальных ситуациях через анализ и сотрудничество. Сочетание теории конструктивизма, метода PBL и модели перевернутого класса предлагает новые подходы и методы для преподавания физики.

Перевернутый класс, как метод обучения, кардинально изменяет традиционную модель обучения, основываясь на перераспределении и переосмыслении учебной деятельности как в аудитории, так и вне ее [1]. В традиционной модели обучения преподаватель обычно объясняет учебный материал на занятии, а студенты выполняют соответствующие задания после него. Однако в перевернутом классе, с помощью информационных технологий, процесс передачи знаний переносится на этап «до занятия»: студенты самостоятельно изучают основные знания, просматривая учебные видео и читая соответствующие материалы. Время на занятии в основном используется для взаимодействия между преподавателем и студентами, обсуждения проблем и выполнения практических заданий, что способствует более глубокому обучению. Эта модель повышает эффективность использования времени на занятии и создает больше возможностей для активного обучения. Преимущества перевернутого класса заключаются в его способности соответствовать индивидуальным учебным потребностям студентов: они могут многократно просматривать учебные видео или обращаться к материалам в зависимости от своего темпа обучения и уровня понимания, чтобы усвоить ключевые моменты знаний [2]. На занятии преподаватель может более сосредоточенно решать сложные вопросы, с которыми сталкиваются студенты, и направлять их на развитие мышления более высокого уровня. Перевернутый класс акцентирует внимание на активном участии студентов и совместном обучении, что способствует развитию их самостоятельности в обучении и командного духа [3]. Однако реализация перевернутого класса также сталкивается с некоторыми проблемами: необходимость самодисциплины студентов при подготовке к занятиям и влияние их учебных результатов на качество учебной деятельности. В этом случае преподавателям необходимо разработать эффективные механизмы контроля и мотивации. Разработка и интеграция учебных ресурсов также требует высокой квалификации преподавателей. Кроме того, некоторые педагоги рассматривают перевернутый класс исключительно как просмотр учебных видео перед занятием, игнорируя важность

взаимодействия в классе и усвоения знаний. Такое одностороннее понимание приводит к искажению проектирования и реализации учебного процесса, что затрудняет достижение ожидаемых результатов. В реальном учебном процессе некоторые преподаватели используют большое количество учебных видео в качестве материалов для предварительного изучения, однако не уделяют должного внимания тщательному проектированию и отбору содержания видео, что приводит к неэффективному обучению студентов перед занятием. В классе преподаватели по-прежнему применяют традиционные методы лекций, что приводит к недостатку эффективного взаимодействия и обсуждений, и студентам трудно связать изученное заранее с содержанием занятия. Эта модель обучения не демонстрирует преимуществ перевернутого класса, а наоборот, увеличивает учебную нагрузку студентов. Причиной этой проблемы является недостаток практического опыта у преподавателей по реализации модели перевернутого класса. Тем не менее, перевернутый класс, как инновационная модель обучения, постепенно меняет традиционные образовательные парадигмы и указывает новое направление для реформ в образовании.

Проблемно-ориентированное обучение (PBL) акцентирует внимание на размещении обучения в контексте реальных проблем, побуждая студентов решать задачи с помощью самостоятельного анализа, сотрудничества и обмена мнениями, создавая знания [4]. Например, при изучении темы «Преломление света» преподаватель может задать вопрос: «Как сделать простой телескоп?», что позволит студентам исследовать информацию, проводить эксперименты, анализировать данные и в конечном итоге понять принцип преломления света и создать простой телескоп. Эта форма обучения объединяет абстрактные физические концепции и реальные проблемы, значительно повышая интерес студентов к обучению и их аналитические способности.

Но некоторые преподаватели отождествляют PBL исключительно с задачами, игнорируя проблемный аспект. Студенты часто испытывают трудности с самостоятельным обучением и могут чувствовать себя растерянными при столкновении с проблемными ситуациями. Применение PBL требует от преподавателей значительных временных и энергетических затрат на проектирование учебного процесса, подготовку ресурсов и руководство процессом. Эти трудности можно преодолеть, так как с постоянным развитием информатизации образования сетевые ресурсы и платформы виртуальных экспериментов предоставляют богатые материалы и инструменты для PBL. Педагоги могут использовать эти ресурсы для проектирования более реалистичных и сложных проблемных ситуаций, направляя студентов на более глубокое аналитическое обучение. Совершенствование профессионального развития преподавателей также может повысить их способность реализовывать PBL.

Теория конструктивистского обучения подчеркивает, что обучающиеся не являются пассивными приемниками знаний, а активно строят новые знания на основе уже имеющегося опыта. Эта теория утверждает, что знания не существуют как объективные сущности, независимые от обучающегося, а являются продуктом, активно создаваемым индивидуумом в процессе взаимодействия с окружающей средой. Обучение рассматривается как процесс, в котором индивидуум на основе уже имеющейся когнитивной структуры ассимилирует или аккомодирует новую информацию. Ассимиляция означает включение новой информации в уже существующую когнитивную зону развития, тогда как аккомодация подразумевает изменение существующей когнитивной зоны для адаптации к новой информации [5]. Теория конструктивистского обучения акцентирует внимание на активности, социальной природе и контекстуальности обучения. Обучающиеся строят знания через активное исследование, взаимодействие с другими и решение проблем в реальных ситуациях. Роль преподавателя меняется с передачи знаний на содействие обучению, создавая благоприятную учебную среду для построения знаний. Теория конструктивистского обучения предоставляет основу для

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

преподавания физики в перевернутом классе на основе метода, ориентированного на решение проблем, подчеркивая центральное место студентов в процессе обучения и значимость совместного анализа и решения проблем для построения физических знаний.

Однако некоторые преподаватели неправильно понимают теорию конструктивизма, предоставляя студентам учиться самостоятельно, игнорируя свою роль в процессе построения знаний. В некоторых учреждениях образования отсутствуют необходимые экспериментальное оборудование и учебные материалы, что затрудняет соответствие требованиям конструктивистского обучения по созданию контекста и практическим действиям. Студенты привыкли за долгое время к пассивному восприятию знаний, что приводит к недостатку активного мышления и осознания важности совместного обучения. отождествляя проблему исключительно с задачами, игнорируя ее реальность и открытость.

В современных практиках преподавания физики в формате перевернутого класса, основанных на проблемно-ориентированных методах, нехватка учебных ресурсов становится ключевой проблемой, препятствующей повышению эффективности обучения. Перевернутый класс требует от студентов предварительного изучения материала с помощью различных способов, однако качественные учебные ресурсы ограничены. Многие преподаватели не обладают навыками создания высококачественных учебных видео, качество существующих видео по физике на онлайн-платформах варьируется, что затрудняет удовлетворение потребностей студентов с различным уровнем подготовки. Экспериментальное обучение является ключевой частью изучения физики, однако онлайн-ресурсы для экспериментов недостаточны, и студенты испытывают трудности в получении реального опыта через виртуальные эксперименты. Нехватка учебных ресурсов приводит к тому, что студенты не могут эффективно усвоить базовые знания на этапе предварительного обучения, а время на занятиях не может быть полностью использовано для обсуждения и анализа проблем, что негативно сказывается на эффективности преподавания в формате перевернутого класса.

При разработке задач для совместного обучения с целью стимулирования сознания сотрудничества у студентов преподаватель должен тщательно учитывать целенаправленность, интерактивность и сложность задач. Например, преподаватель может создать задачу для совместного эксперимента, основанную на законе сохранения энергии, разделив студентов на несколько групп, каждая из которых отвечает за проектирование и выполнение эксперимента, связанного с преобразованием энергии, например, создание мини-гидрогенератора из простых материалов или проектирование устройства для преобразования энергии. Задача требует от членов группы распределения ролей: кто-то отвечает за оформление эксперимента, кто-то за запись данных, а кто-то за анализ результатов. Таким образом, студенты могут применять теоретические знания на практике, а также учиться друг у друга и достигать общего прогресса в процессе сотрудничества. Преподаватель в этом процессе выступает в роли наставника, своевременно предоставляя руководство и обратную связь, помогая студентам преодолевать возникающие трудности. Оформление задачи должно содержать проблемные ситуации, чтобы поощрять студентов предлагать инновационные решения. Например, в ходе эксперимента преподаватель может направить студентов на размышления о том, как оптимизировать экспериментальное устройство для повышения эффективности преобразования энергии, или обсудить источники ошибок, возникающих в процессе эксперимента, и способы их устранения. Такие задачи для совместного обучения могут стимулировать сознание сотрудничества у студентов, а также развивать их критическое мышление и умения в решении проблем. С помощью групповых обсуждений и презентаций результатов студенты могут понимать физические концепции с разных точек зрения и углублять свои знания в процессе общения. Этот метод обучения соответствует основным идеям теории конструктивистского обучения и предоставляет эффективные практические пути для реализации перевернутого класса на основе проблемно-ориентированных методов в преподавании физики.

Таким образом можно сделать вывод, что недостаточное понимание преподавателями концепции перевернутого класса на основе проблемного обучения в контексте конструктивизма приводит к отклонениям в проектировании и реализации учебного процесса, студенты не обладают достаточной осведомленностью и методами для совместного анализа, что негативно сказывается на повышении эффективности обучения, недостаток необходимых учебных ресурсов для перевернутого класса ограничивает качество обучения. Однако повышение теоретической подготовки поможет преподавателям лучше понять и применять концепцию перевернутого класса, проектирование задач для совместного обучения, стимулирующее осознание необходимости сотрудничества у студентов, может способствовать взаимодействию и обмену идеями между ними, а разработка качественных учебных ресурсов, соответствующих учебным потребностям, обеспечит надежную основу для реализации модели перевернутого класса. Реализация этих мер может способствовать развитию преподавания физики в формате перевернутого класса на основе проблемно-ориентированных методов в контексте конструктивизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжан Бин, Чжан Юн.Чунцин. Исследование применения модели перевернутый класс в преподавании физики в старших классах // Научный консалтинг (образование и научные исследования). – 2021. – С.12-13.
2. Ли Вэй, Су Лин. Исследование стратегии применения микрокурсов в преподавании физики в перевернутых классах в колледжах и университетах // Технологии беспроводных соединений. – Нанкин, 2021. – С. 148-149.
3. Чжуо Га Наньнин. Применение перевернутой модели обучения в классе в преподавании физики в университете // Guangxi Physics. – 2020. С.73-75.
4. Тан Хуаянг, Дуань Давэй, Дон Липин. Исследование применения проблемно-ориентированных методов обучения в сочетании с перевернутыми классами при преподавании дерматологии в онлайн-среде // Практическая дерматология. – Пекин, 2023. – С. 238-241.
5. Halpenny A.M., Pettersen J. Introducing Piaget: a guide for practitioners and students in early years education. – N.Y: Routledge, 2014.

ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ 1.01
(МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ)

А.А. Меньшиков, Л.К. Ермаков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ alexey.aam@mail.ru

Ранее в лабораторной работе 1.01 студенты многократно (50 раз) повторяли измерение одной и той же величины – частота аналогового генератора, напряжение источника питания, а также промежуток времени, отсчитываемый по механическим часам и измеряемый с помощью цифрового измерителя времени, в роли которых выступали частотомеры разных модификаций. Однажды у нас на занятиях в лаборатории появился слепой студент, сопровождаемый поводырем. Слепому студенту было предложено отсчитывать промежуток времени «на счет», то есть время отсчитывать «про себя» и нажимать на кнопки «старт», «стоп» и «сброс», а показания записывал его поводырь. Поводырь перед этим выполнил свой вариант этой лабораторной работы. Они довольно быстро провели этот эксперимент и ушли домой. Самое интересное заключалось в том, что гистограмма слепого студента оказалась почти идеально симметричной (это был лучший результат в группе по части симметрии). Воодушевившись этим примером, мы стали далее предлагать и другим студентам моделировать случайную величину «на счет».

Дело в том, что когда человек произносит слово «двадцать два», проходит примерно секунда. Произносить надо не быстро и не медленно – «средне». Перед этим, конечно же, надо дома потренироваться, говорить про себя, чтобы не мешать другим студентам, руки держать на клавишах «старт» «стоп», за цифрами не смотреть (чтобы за ними «не побежать»). Каждый делает это самостоятельно, для себя (не один на бригаду). Результаты записывать в таблицу, приведенную на сайте кафедры, которую они распечатывают дома. У кого нет таких возможностей, мы даем из своих запасов. Промежуток времени – три секунды. Произнести 50 раз по три раза фразу «двадцать два» – на это уходит у всех около 15 минут. Поэтому остается много времени на проведение и оформление расчетов. Материал для студентов очень сложный – теория вероятности, статистика, кривая Гаусса (некоторые даже экспоненту не могут правильно вычислить на калькуляторе, так как там «exр» «ex» – это разные понятия). Поэтому мы помогаем студентам в проведении расчетов и успеваем дойти до построения гистограммы в грубом виде, вычисления среднего значения и дисперсии. Остальное они доделывают дома. Некоторые преподаватели предлагают измерять промежуток времени 5 – 6 секунд, но мы считаем, что это лишь затягивает процесс измерений, из-за чего не удастся дойти на первом же занятии до гистограммы в грубом виде.

Самое интересное заключалось в том, что эта работа оказалась тестом на «психотип» студента: очень спокойные студенты выдавали почти симметричную гистограмму, а очень сильно «нервные» выдавали почти горизонтальную прямую. Студенты со средним состоянием своей нервной системы выдают несимметричную гистограмму или с двумя максимумами. Таким образом, данная работа может являться хорошим тестом для «отбраковки» и подготовки военных снайперов, для которых нужна абсолютно уравновешенная нервная система.

И в конце хочется предложить и для всех лабораторных работ выставлять на сайте кафедры готовую таблицу. Практика нашей работы говорит о том, что почти все студенты дома её не готовят и, приходя в лабораторию, 15-20 минут тратят на вычерчивание таблиц для работы. Это отнимает время на проведение самой работы и оставляет мало времени на проверку готовых отчетов предыдущих работ. Самое замечательное это то, что студенты уже сами дома делают эти таблицы в электронной форме и раздают их своим коллегам.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА π , ПОЛУЧЕННОГО ПРИ
СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ РАЗЛИЧНЫХ
МАТЕРИАЛОВ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ В РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Н.И. Руль, И.Д. Веневцев, Д.Н. Тонков, К.Б. Таранец, В.В. Романов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ rul_ni@spbstu.ru

Одной из ключевых задач образовательных программ университетов является развитие у студентов способностей выявления закономерностей в массивах тех или иных данных. Решение этой задачи ни в коем случае не относится исключительно к естественно-научным и техническим направлениям. Напротив, эта задача имеет непосредственное отношение к любой сфере интеллектуальной деятельности.

С такой задачей мы встречаемся, работая с базами табулированных данных, при сопоставлении и интерпретации полученных в испытаниях результатов.

С другой стороны, анализируя воспроизводимость результатов эксперимента, мы обращаемся к распределениям, сформулированным в математической статистике.

Сказанное выше означает, что фундаментальная подготовка исследователей и инженеров любого профиля, необходимая для профессиональной деятельности, должна базироваться на изучении теории, планировании и проведении экспериментальных исследований и приобретения навыков обработки и интерпретации экспериментальных результатов с использованием баз данных.

В настоящей работе речь пойдет, прежде всего, о заключительном положении, а именно, приобретении навыков обработки и интерпретации экспериментальных результатов с использованием справочных данных.

Работа со справочными таблицами является важной составляющей труда исследователя и, помимо информационной поддержки, представляет интерес для развития навыков выявления определенных закономерностей.

Накопленные в течение многолетних исследований результаты, характеризующие различные свойства материалов, приводятся в различных справочных изданиях, как правило, в двух основных системах единиц – физической (гауссовой) и инженерной (СИ). Сравнение табулированных значений физических величин дает основание для неожиданных, на первый взгляд, выводов. Оказывается, что, используя экспериментальные данные, а именно такие результаты содержатся в таблицах, можно определить значение одной из важнейших математических констант – числа π .

Далее, именно тот факт, что собранные в справочниках данные являются результатами независимых экспериментов, наводит на мысль, что искомая величина должна подчиняться некоторому статистическому распределению, а именно, нормальному распределению (Гаусса).

Убедиться в справедливости этих наблюдений и рассуждений можно обратившись, например, к табличным значениям такой характеристики магнитных свойств веществ как магнитная восприимчивость.

Посетив интернет-ресурс periodictable.com, можно получить информацию об искомой величине, представленную в системе единиц для инженерных расчетов (СИ). Используя весьма авторитетный и популярный у физиков справочник «Физические величины» [1], – найти интересующую информацию, записанную в гауссовой системе единиц.

Магнитные проницаемости веществ связаны с их магнитными восприимчивостями соотношениями $\mu - 1 = \chi_{\text{си}}$ и $\mu - 1 = 4\pi\chi_{\text{гаусс}}$, в СИ и гауссовой системах, соответственно, приравняв правые части выражений, получаем соотношение $\chi_{\text{си}}/\chi_{\text{гаусс}} = 4\pi$.

Таким образом, используя табличные значения из указанных источников для различных материалов, мы формируем массив данных для построения гистограммы и нахождения числа π (рис. 1).

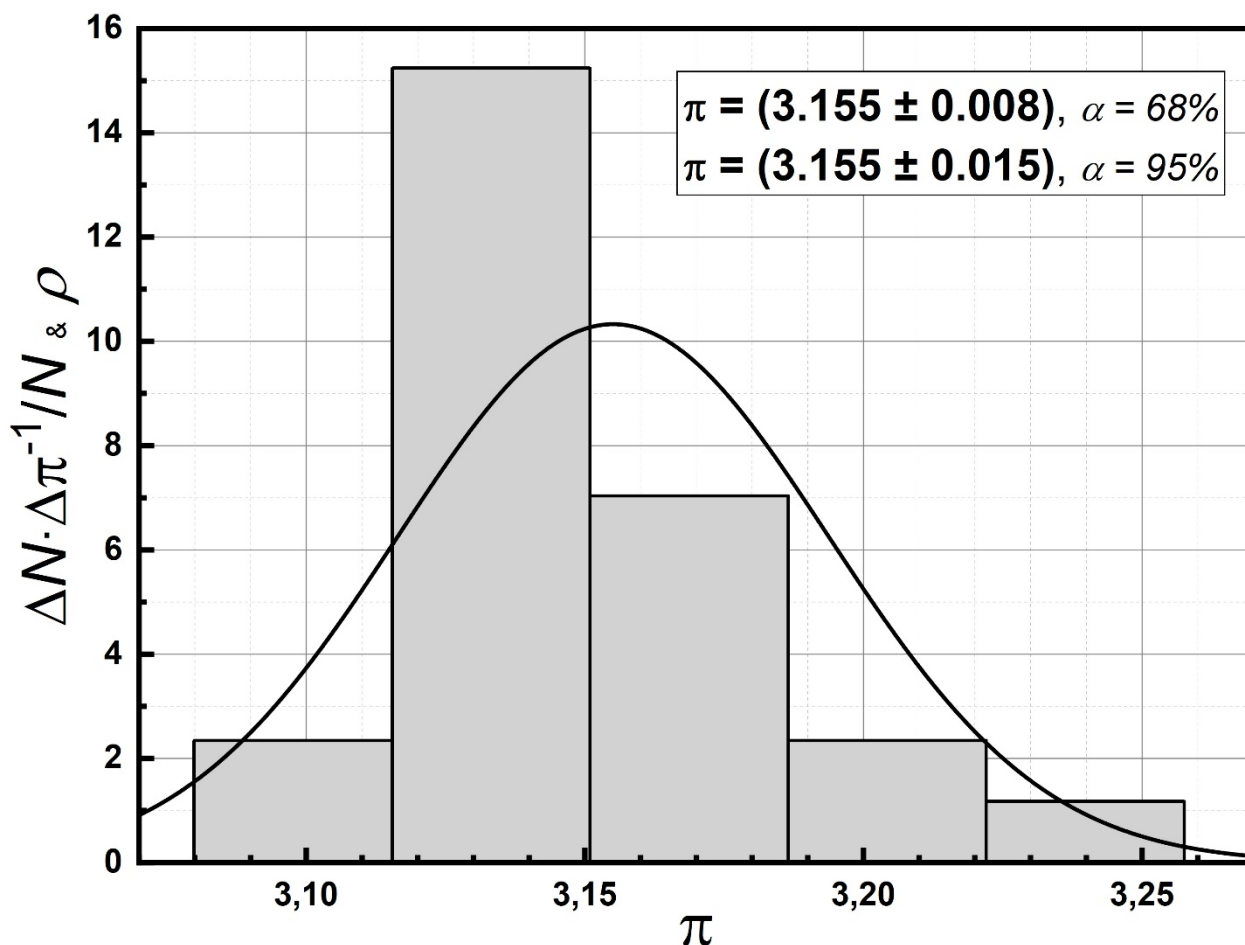


Рис. 1. Гистограмма и функция распределения величины π , полученные при сравнительном анализе удельных магнитных восприимчивостей различных материалов, представленных в двух независимых источниках.

Изложенная здесь идея и ее возможная реализация не является претензией на замену существующей в учебной лаборатории кафедры физики фронтальной работы 1.01 [2], посвященной моделированию случайной величины и исследованию её распределения.

По-видимому, более уместным будет постановка предложенной нами работы в перечень выполняемых во втором семестре работ в качестве фронтальной, в первую очередь, для физических факультетов.

И, наконец, мы полагаем полезным высказать некоторые соображения касательно проведения лабораторной работы 1.01.

Изначально, при постановке этой работы, предполагалось, что результаты проведенных в процессе её выполнения измерений должны подчиняться распределению Гаусса (нормальному распределению). Это условие подразумевает, что полученный массив сформирован из статистически независимых результатов наблюдений [3].

Далее встает вопрос о технической реализации проводимого эксперимента. Заметим, что наиболее простой версией выполнения работы является многократное измерение наперед заданного промежутка времени. Измерения могут быть выполнены бригадой, сформированной из двух студентов с четко оговоренными функциональными обязанностями.

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

А именно: один из пары задает начало и конец измеряемого интервала нажатием соответствующих кнопок секундомера (телефона). При этом, информационное табло прибора должно быть выведено из поля его зрения. Второй студент, записывающий результаты измерений, не сообщает их напарнику до окончания серии измерений. Далее проводится обработка полученных результатов в соответствии с методическими указаниями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины: Справочник. – М.: ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ, 1991. – 1232 с.
2. Козловский В.В., Михрин С.Б. Общая физика. Механика и молекулярная физика. – СПб.: 2000. – 64 с.
3. Агапьев Б.Д., Козловский В.В. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 61 с.

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОЙ ГРАМОТНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА ПРИМЕРЕ РАЗДЕЛА
ФИЗИКИ «КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

А.Н. Смоликова, В.М. Кротов

Могилёвский государственный университет имени А.А. Кулешова, Беларусь

✉ nastasmol2002@gmail.com

Введение. В современном мире функциональная естественнонаучная грамотность – ключевой фактор успешной адаптации человека. Данная статья посвящена исследованию возможностей различных видов задач в развитии функциональной естественнонаучной грамотности учащихся при изучении раздела физики "Колебания и волны". Цель работы – выявление и классификация эффективных типов задач для развития функциональной естественнонаучной грамотности при изучении раздела физики "Колебания и волны".

Для достижения цели решаются следующие задачи: анализ теоретических основ функциональной естественнонаучной грамотности, отбор и классификация задач, подходящих для её развития. Использованные методы исследования: теоретический анализ литературы и примерных результатов применения задач.

Результаты исследования позволят разработать дидактический материал для учителей физики по использованию различных типов задач для развития функциональной естественнонаучной грамотности учащихся и повышения качества естественнонаучного образования.

О видах задач, подходящих для развития функциональной естественнонаучной грамотности. Физика является предметом, в котором применение разнообразных видов задач раскрывается наиболее полно. На уроках физики педагог получает возможность применять такие виды задач, как количественные, качественные, экспериментальные, графические, текстовые, задачи с рисунками, учебные исследования и многих других. Каждый вид задач выполняет свою функцию, помогая учащимся усвоить знания, развить умения и сформировать навыки. Наиболее подходящими для развития функциональной естественнонаучной грамотности задачами могут быть выбраны качественные задачи, задачи на преобразование данных, учебные исследования и домашние опыты и наблюдения. Рассмотрим каждый вид отдельно и приведём примеры из раздела «Колебания и волны».

Качественные задачи. Одним из перспективных и зачастую недооцененных средств развития естественнонаучной функциональной грамотности, особенно в контексте физического образования, являются качественные задачи. Эти задачи, в отличие от количественных, где акцент делается на математических расчетах и получении численного ответа, ориентированы на углубленное понимание физических принципов и закономерностей, умение устанавливать причинно-следственные связи и применять теоретические знания для объяснения и прогнозирования реальных физических явлений и процессов. [1]

Качественные задачи – ценный инструмент для раскрытия межпредметных связей, что важно для формирования целостного и системного мышления в естественнонаучном образовании. В отличие от количественных задач, качественные задачи часто затрагивают сложные вопросы на стыке наук. Это позволяет учащимся увидеть взаимосвязь научных областей и понять, что для объяснения многих явлений необходимы знания из разных дисциплин. Приведём пример того, как качественные задачи могут раскрывать межпредметную связь «Физика и Музыка»:

Как высота звука связана с частотой колебаний струны гитары? Что произойдет с высотой звука, если укоротить струну? Межпредметная связь: Объяснение связи между длиной струны, скоростью распространения волны по струне и частотой колебаний.

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

Укорачивание струны приводит к увеличению частоты и, следовательно, к повышению высоты звука.

Задачи на преобразование данных. Эффективным способом развития естественнонаучной функциональной грамотности является использование расчетных задач на преобразование данных, особенно в контексте физических явлений и законов. Решая такие задачи, мы не просто тренируем математические навыки, а учимся критически мыслить и анализировать информацию, представленную в различных форматах – от графиков зависимости скорости от времени до таблиц удельного сопротивления материалов. Мы извлекаем ключевые физические величины, выявляем закономерности, описываемые физическими законами, строим прогнозы и оцениваем погрешности. [2]

Приведём пример такой задачи:

На рисунке 1 представлен график зависимости силы упругости пружины от её деформации.

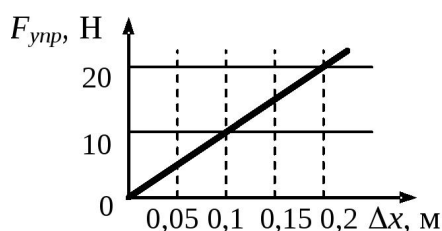


Рис. 1. График зависимости

- А) Определите жесткость пружины.
- Б) Рассчитайте потенциальную энергию пружины при деформации 0.1 м.
- В) Предположим, что к пружине подвесили груз массой 0.2 кг. Определите деформацию пружины в состоянии равновесия.
- Г) Оцените период колебаний груза, подвешенного к этой пружине.
- Д) Объясните, как изменится жесткость пружины, если её разрезать пополам.
- Е) Предположим, что к одной пружине последовательно присоединили вторую пружину с такой же жесткостью. Как изменится общая жесткость системы?

Учебные исследования. В современном образовании, нацеленном на формирование функциональной естественнонаучной грамотности, учебные исследования приобретают особую значимость. Они не просто позволяют усваивать теоретические знания, а активно вовлекают учащихся в процесс научного познания. Учебные исследования развивают критическое мышление, умение формулировать гипотезы, планировать эксперименты, анализировать данные и делать обоснованные выводы, что является ключевыми компетенциями функциональной естественнонаучной грамотности.

Посредством самостоятельной исследовательской деятельности, учащиеся пробуют применять научные методы для решения реальных проблем, что значительно повышает их уверенность в собственных силах и мотивацию к изучению естественных наук. Приведём пример такого исследования «Интерференция и дифракция волн на воде»:

Цель: Наблюдать и анализировать явления интерференции и дифракции волн, создаваемых на поверхности воды.

Гипотеза (ключевые слова): Интерференция, дифракция, гребни, впадины, когерентность, огибание препятствий.

Ход работы:

1. Наполнить большую емкость водой.
2. Создать два источника когерентных волн на поверхности воды (например, два вибрирующих шарика, закрепленных на одном стержне).

3. Наблюдать за картиной интерференции волн (чередование гребней и впадин).
4. Измерить расстояние между максимумами и минимумами интерференционной картины.
5. Поместить на пути волн препятствие (например, пластину с отверстием).
6. Наблюдать за явлением дифракции волн (огибание волнами препятствия).
7. Сфотографировать или зарисовать картины интерференции и дифракции.
8. Сравнить наблюдаемые картины с теоретическими предсказаниями.

Вывод (ключевые слова): Интерференция, дифракция, максимумы, минимумы, длина волны, размер препятствия, принцип Гюйгенса. На поверхности воды наблюдаются явления интерференции и дифракции, подтверждающие волновую природу воды. Картина интерференции зависит от расстояния между источниками волн и длины волны. Дифракция проявляется тем сильнее, чем меньше размер препятствия по сравнению с длиной волны.

Домашние опыты и наблюдения. Домашние опыты – мощный инструмент развития естественнонаучной функциональной грамотности. Они активизируют обучение, связывают теорию с практикой, формируют исследовательские навыки, мотивируют к науке и развивают критическое мышление. Включение домашних опытов в изучение раздела «Колебания и волны» углубляет понимание физики и формирует у учащихся навыки, необходимые в современном мире. Ключевая роль педагога – поддержка, направление и помощь в анализе результатов домашних исследований. [3]

Приведём пример домашнего опыта «Танцующий шарик»:

Оборудование: вода, вытекающая из ванны или раковины, легкий шарик.

Задание: Из ванны или раковины вытекает вода. Если поместить легкий шарик вблизи сливного отверстия, он начнет колебаться. Исследуйте и объясните это явление.

Заключение. По приведённой информации можно сделать выводы, что целенаправленное и систематическое применение различных видов задач – качественных, на преобразование данных, учебных исследований, домашних опытов и наблюдений – способствует эффективному развитию функциональной естественнонаучной грамотности учащихся, в том числе при изучении раздела "Колебания и волны". Использование предложенных видов задач позволяет не только углубить понимание физических закономерностей, но и сформировать навыки критического мышления, анализа информации и решения проблем, необходимые для успешной адаптации в современном мире.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов. В. М. Развитие функциональной естественнонаучной грамотности учащихся при обучении физике / В. М. Кротов, А. Н. Смоликова // Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс: материалы III Междунар. науч.–практ. конф. (г. Борисоглебск, 6–7 апр. 2023 г.). – Воронеж: ВГУ, 2023. – С. 68 – 75.
2. Кротов, В. М. Дидактические средства развития естественно–научной грамотности учащихся при обучении физике / В. М. Кротов, А. Н. Смоликова // Народная асвета. – 2024 – № 1. – С.7– 11.
3. Кротов В. М. Домашние опыты и наблюдения как средство развития естественнонаучной функциональной грамотности учащихся при обучении физике / В.М Кротов, А.Н. Смоликова // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально техническим дисциплинам : материалы XV Междунар. Науч.–практ. Конф., Мозырь, 24 марта 2023 г. / УО МГПУ им. И. П. Шамякина ; редкол.: И. Н. Ковальчук (отв. Ред.) [и др.]. – Мозырь: МГПУ им. И. П. Шамякина, 2023. – С. 118–120.

РАЗВИТИЕ МЕТОДИК ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ЗА СЧЕТ
ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

И.М. Стародуб, Д.В. Вязовой, Д.И. Юрченко, М.А. Богданов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ starodub.im@edu.spbstu.ru

Современное образование находится на этапе активной трансформации, вызванной стремительным развитием цифровых технологий [1]. Особенно заметны эти изменения в области преподавания физико-математических наук, где традиционные методы обучения постепенно дополняются инновационными подходами, основанными на использовании цифровых инструментов. В данной статье рассматривается, как разные цифровые технологии могут способствовать улучшению усвоения материала студентами, а также анализируются результаты опроса, проведенного среди студентов бакалавриата, с целью выявления наиболее востребованных инструментов для обучения.

Одной из ключевых проблем в обучении физико-математическим дисциплинам является сложность восприятия абстрактных концепций и методов решения задач [2]. Традиционные лекции и семинары не всегда позволяют студентам в полной мере освоить материал, особенно если они сталкиваются с недостатком практики или отсутствием наглядных примеров. В этом контексте цифровые технологии предлагают новые возможности для повышения эффективности обучения. Они позволяют создавать интерактивные материалы, визуализировать сложные концепции и предоставлять студентам доступ к дополнительным ресурсам для самостоятельной работы.

Как отмечается в исследовании доктора Шахида Саджад, "студенты являются наиболее квалифицированными источниками для оценки продуктивности, информативности и удовлетворенности образовательным процессом" [3]. Это подтверждает важность учета мнения студентов при разработке новых методик обучения. В нашем опросе также подчеркивается, что студенты ценят разнообразие форматов, включая интерактивные элементы, что согласуется с выводами исследования, где "групповые обсуждения и лекции были оценены как наиболее эффективные методы" [4].

Для того чтобы определить, какие именно инструменты могут быть наиболее полезны для студентов, был проведен опрос среди бакалавров, изучающих физико-математические науки. Результаты опроса представлены в виде гистограммы на рис. 1. Результаты опроса показали, что наибольший интерес у студентов вызывают разборы задач в открытом доступе. Более 70% респондентов отметили, что наличие таких материалов в открытом доступе значительно облегчило бы процесс обучения. Это подтверждает, что студенты ценят наглядные примеры решений, которые помогают понять логику применения теоретических знаний. Близко также расположились видеолекции. 63% опрошенных заинтересованы в видеолекциях, что связано с удобством восприятия материала в динамичном формате. Примерно 30% опрошенных выбирали карточки, содержащие краткие формулировки теорем, определений и ключевых понятий, позволяют быстро повторить материал перед экзаменами или практическими занятиями. А также мини-игры и разнообразные интерактивные платформы, которые позволяют решать задачи в режиме реального времени с мгновенной проверкой ответов. Такие платформы не только способствуют развитию навыков самостоятельной работы, но и предоставляют возможность сразу же исправлять ошибки, что делает процесс обучения более эффективным.

Эти данные показывают, что студенты стремятся к разнообразию форматов обучения, сочетающих теорию, практику и интерактивные элементы. Цифровые технологии открывают новые возможности для преподавания физико-математических наук. Внедрение электронных учебных пособий, видеолекций, интерактивных тестов и разборов задач позволяет сделать

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

обучение более гибким и персонализированным. Такие ресурсы не только облегчают понимание материала, но и экономят время преподавателей, позволяя сосредоточиться на ключевых аспектах дисциплины.

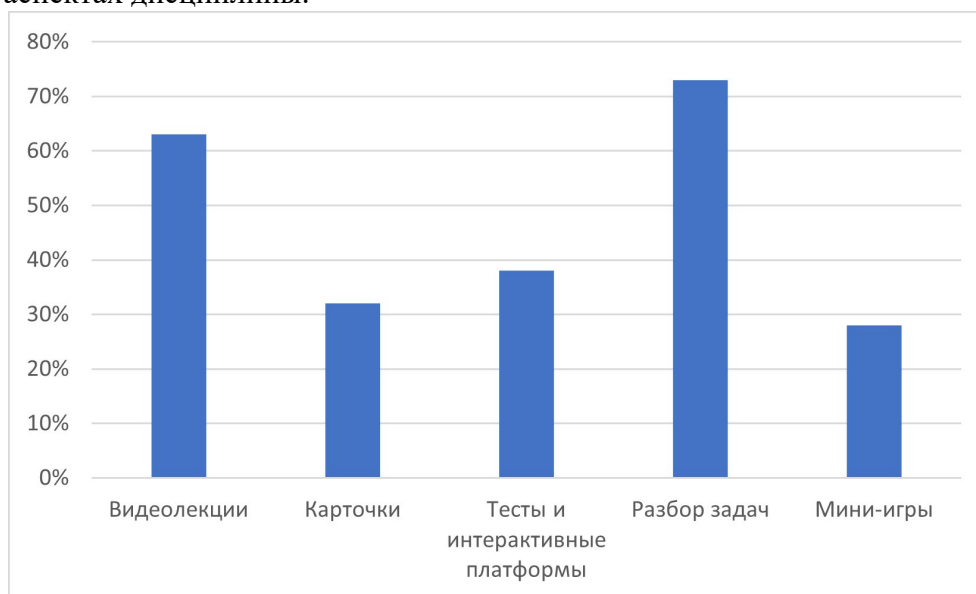


Рис. 1. Результаты опроса среди студентов в виде гистограммы

Однако важно учитывать, что эффективность цифровых инструментов зависит от их качества и методической проработки. Например, разборы задач должны быть детализированными, а видеолекции – структурированы и лаконичны. К тому же, внедрение новых технологий требует пересмотра учебных программ и роли преподавателя, который становится не просто лектором, а тьютором, направляющим самостоятельную работу студентов. Видно, что дальнейшее развитие образовательных технологий должно быть ориентировано на создание удобных, интерактивных цифровых ресурсов, отвечающих запросам современных студентов. Это позволит повысить качество обучения и мотивацию учащихся в изучении сложных дисциплин.

В заключение можно сказать, что цифровые технологии открывают новые горизонты для развития методик обучения физико-математических наук. Они не только облегчают процесс усвоения материала, но и способствуют повышению мотивации студентов, делая обучение более интересным и интерактивным. Результаты опроса подтверждают, что студенты готовы активно использовать цифровые ресурсы, если они будут доступны и адаптированы под их потребности. Таким образом, дальнейшее развитие образовательных технологий должно быть направлено на создание удобных и эффективных инструментов, которые помогут студентам достигать высоких результатов в изучении сложных дисциплин. Но стоит учитывать, что развитие инновационных методик обучения на основе цифровых технологий является лишь поддержкой традиционного обучения, а не ее заменой [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артюхов Андрей Викторович, Молоткова Таисия Леонидовна Информационные и коммуникационные технологии в образовании // Вестник ЧелГУ. 2015. №26 (381).
2. Puranik S. Innovative teaching methods in higher education // BSSS Journal of Education. – 2020. – Т. 9. – №. 1. – С. 67-75.
3. Braskamp L. A., Ory J. C. Assessing Faculty Work: Enhancing Individual and Institutional Performance. Jossey-Bass Higher and Adult Education Series. – Jossey-Bass Inc., 350 Sansome Street, San Francisco, CA 94104, 1994.
4. Sajjad S. Effective teaching methods at higher education level // Pakistan journal of special education. – 2010. – Т. 11. – С. 29-43.

МОТИВАЦИЯ СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ К ОБУЧЕНИЮ В ИНЖЕНЕРНОМ ВУЗЕ ГЛАЗАМИ СТУДЕНТОВ

А.Д. Ульманова, М.И. Иткин, Н.А. Леонова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
✉ ulmanova.a@edu.spbstu.ru

«Новая индустриализация» обострила проблему нехватки инженерных кадров. Современные производственные комплексы нуждаются в квалифицированных специалистах. Конкурс в технические вузы стабильно высокий. Так, например, в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого зачисление абитуриентов происходит при суммарном балле от 270. Однако результаты аттестации за первый месяц обучения показывают, что 30% студентов имеют проблемы с посещаемостью, а 70% — с успеваемостью. Для анализа сложившейся ситуации мы провели анкетирование среди студентов и преподавателей инженерно-строительного института СПбПУ. В бланке были следующие вопросы:

1. Почему Вы выбрали профессию инженера?
2. Почему Вам неинтересно учиться?
3. Что нужно изменить в учебном процессе?

По результатам анкетирования студентов выяснилось, что основная причина плохой посещаемости и успеваемости — разочарование в учебном процессе и, как следствие, низкая мотивация. Примерные ответы студентов:

- «Учиться неинтересно, много лишних предметов»;
- «Очень большая нагрузка, сложные предметы»;
- «Предметы как в школе, нас не учат профессии».

Как видно, проблемы обучения студентов на первом курсе обусловлены отсутствием мотивации, что приводит не только к потере интереса, но и к отчислению.

Преподаватели в своих ответах отмечают:

- «Плохие знания физики и математики»;
- «Отсутствие мотивации в обучении».

Таким образом, и студенты, и преподаватели видят основную причину низкой успеваемости в отсутствии мотивации.

Постановка проблемы

Выявить ключевые факторы, влияющие на мотивацию студентов инженерных направлений, и предложить практические рекомендации для преподавателей, основанные на мнении самих обучающихся.

Решение проблемы

Проблема мотивации широко исследуется в зарубежной и отечественной литературе. Над вопросами побуждения человека к деятельности работали Л.И. Божович, Х. Хекхаузен, П.А. Рудик, Г. А. Ковалев, К. К. Платонов, А.А. Реан, В. А. Якунин и другие. Термин «мотивация» трактуется как «действие» или «движение» [1,2,3]. Например, Л.И. Божович определяет мотив как намерения, Х. Хекхаузен — как побуждения и склонности, П.А. Рудик — как желания. Л. Д. Столяренко и С.И. Самыгина утверждают, что мотив — это побуждение к совершению поведенческого акта, порожденное системой потребностей человека, которое может быть осознанным или неосознанным [4].

Таким образом, мотивация — это желание человека действовать. В контексте нашего исследования мотивация — это стремление учиться, узнавать новое, приобретать профессиональные знания. Результаты анкетирования студентов показали следующие факторы, повышающие интерес к учебе:

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

- понятные правила оценивания и регламент экзамена (35%);
- знакомство с будущей профессией, экскурсии на производство (25%);
- использование профессиональных примеров (30%);
- возможность обсудить проблемы с преподавателями (10%);
- поддержка родителей (10%).

Студенты также отмечали важность социального статуса профессии и престижа. 5% респондентов указали на желание «сделать что-то полезное». Современные студенты ценят практическое применение знаний, что мотивирует их к изучению «нужных» дисциплин.

На основе ответов сформулированы рекомендации для преподавателей:

1. Объяснять социальную значимость профессии инженера.
2. Организовывать экскурсии на производство и знакомить с карьерными перспективами.
3. Использовать профессиональные примеры на занятиях.
4. Четко обозначать критерии оценивания на экзаменах.

Современные студенты предпочитают интерактивные форматы: электронные материалы, видео, проектное обучение с реальными кейсами. В учебный процесс рекомендуется внедрить:

- Гибкую систему оценивания (учет индивидуальных достижений, портфолио);
- Проектные задания, связанные с практикой.

Мотивация студентов младших курсов — ключевой фактор их успеха. Преподавателям важно адаптировать методы преподавания, подчеркивая практическую значимость материала. Дальнейшие исследования могут быть направлены на оценку эффективности предложенных мер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бордовская Н.В., Реан А.А. Педагогика: учебное пособие. Санкт-Петербург: Питер, 2009.
2. Маркова А.К. Формирование мотивации учения. Москва: Просвещение, 2006.
3. Стародубцева В.К. Мотивация студентов к обучению. Современные проблемы науки и образования. 2014; № 6.
4. Столяренко Л.Д., Самыгин С.И. Психология. Ростов-на-Дону: Издательский центр «МарТ», 2001.

СТУДЕНЧЕСКОЕ САМОУПРАВЛЕНИЕ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ: РОЛЬ, ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

А.Э. Чиликина, Б.С. Тёрушкин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ alisachil@gmail.com

Введение. Контроль усвоения материала за семестр невозможно ограничить одной или двумя контрольными работами, как это предусмотрено учебным планом, например, при преподавании физики и математики. Например, в первом семестре изучаются системы линейных уравнений, матричная алгебра, векторы, комплексные числа, функции, многочлены, пределы, производные и дифференциалы. Объединить такой объем материала в одну контрольную работу практически невозможно. Необходимость самостоятельных проверочных работ, тестов и иных методов контроля очевидна.

Кроме того, мотивация к учёбе со временем не возрастает, а эффективное усвоение материала требует регулярных повторений. В условиях ограниченного аудиторного времени роль домашних тренировок возрастает, однако проверка домашних заданий не предусмотрена учебными планами.

Об индивидуальном подходе при перегруженности потоков и групп говорить не приходится. Дополнительно, наличие иностранных студентов, не владеющих базовым русским языком, затрудняет изучение материала и замедляет процесс обучения. Для сильных студентов это становится фактором снижения вовлеченности.

Помимо преподавания на занятиях преподаватель вынужден выполнять организационные и дисциплинарные функции: вести учет посещаемости, следить за дисциплиной, пресекать использование гаджетов не по назначению, контролировать порядок в аудитории. Эти факторы отвлекают от основного процесса обучения.

Выходом может стать внедрение элементов студенческого самоуправления, которые позволят перераспределить часть организационных функций и улучшить учебный процесс.

Организация студенческого самоуправления в учебном процессе. Для повышения эффективности работы предлагается разделение студентов на небольшие группы (команды) с закреплением ролей внутри них. Это может включать:

- Капитанов, отвечающих за организацию работы команд, на которые разделена учебная группа

- Адмиралов, отвечающих за координацию работы всей учебной группы, ведущих учет посещаемости, баллов

- Адмиралиссимуса, отвечающего за весь поток, и имеющего максимальную связь с преподавателем

- Лицензиатов и частичных лицензиатов, выполняющих специализированные функции помощи, такие как проверка домашних заданий с их защитой, т.е. с проверкой авторства выполнившего домашнюю работу и проверкой понимания всех изложенных действий. Лицензиат – сильный студент, которому доверена проверка и защита домашних заданий других студентов без ограничений. Своё домашнее задание сдаёт только лично преподавателю с наиболее полным разумным комплектом возможных вопросов по заданию. Частичный лицензиат – сильный студент, которому позволено проверять домашние работы с защитой, но количество этих работ ограничивается в процентном отношении к количеству работ, проверенных преподавателем лично или полным лицензиатом (например 50% лицензия на проверку).

Расширение функций студентов. В рамках самоуправления студенты могут выполнять следующие функции:

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

- Ведение учета посещаемости и информирование преподавателя. Это позволит сократить время на переключку и дать возможность преподавателю сосредоточиться на занятии.

- Помощь в настройке мультимедийных средств и раздаточного материала. Например, подготовка презентаций, включение проекторов, раздача материалов.

- Краткие доклады на занятиях. Группы могут готовить небольшие выступления по пройденному материалу, что поможет глубже его освоить.

- Взаимопомощь при выполнении домашних заданий. Студенты могут объяснять сложные темы друг другу, что повысит общий уровень понимания.

- Помощь в работе с электронными лекциями. Например, при наличии иностранных студентов объяснение сложных тем на одном языке и перевод на другой.

- Ведение балльно-рейтинговой системы. При этом сама балльно-рейтинговая система требует отдельного рассмотрения.

Самостоятельное ведение текущих оценок внутри групп позволит студентам лучше контролировать свой прогресс, сравнивать свой уровень с коллегами по команде, т.е. со своей «референтной группой».

- Напоминания и контроль. Адмиралы и капитаны команд могут помогать менее организованным однокурсникам следить за сроками выполнения заданий.

- Использование «референтной группы». Преподаватель не всегда является членом референтной группы, гораздо чаще студенты ориентируются на своих сверстников, одноклассников. Когда студенты видят, что задание может выполнить капитан, адмирал, лицензиат, адмиралиссимус, т.е. такой же студент, это придаёт дополнительную уверенность в своих силах. Тут уже нельзя сказать «Вам легко, Вы этим занимаетесь всю жизнь».

Заключение. Введение элементов студенческого самоуправления в учебный процесс может значительно повысить эффективность обучения. Оно способствует улучшению контроля знаний, развитию самостоятельности, усилению мотивации студентов и снижению нагрузки на преподавателей. Такое распределение обязанностей делает процесс обучения более динамичным и структурированным, что в конечном итоге приводит к повышению успеваемости и вовлеченности студентов.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Е.Р. Чуркина, А.В. Малышева
Естественно-научный лицей СПбПУ
✉ churkina.ekaterina07@gmail.com

Тригонометрические уравнения на протяжении многих лет встречаются в задании ЕГЭ №6, а также в задании №13 повышенной сложности. Изучение методов их решения позволит справиться с любой задачей на ЕГЭ. Также решение уравнений систематизирует знания в области тригонометрии. Сейчас тригонометрия используется в таких сферах, как медицина, астрономия, архитектура, проектирование, инженерия. Например: для того, чтобы спроектировать комнату или аудиторию так, чтобы волны отражались на слушателя сбалансированным и прямым образом, нужно определить углы звуковых волн. Часто с синусами и косинусами приходится сталкиваться геодезистам. Они имеют специальные инструменты для точного измерения углов. При помощи синусов и косинусов углы можно превратить в длины или координаты точек на земной поверхности. И существует ещё множество других примеров, которые показывают, что эти знания могут пригодиться вам и в будущем (также в медицине, архитектуре).

Основной задачей проекта было создание учебного пособия по тригонометрическим уравнениям с теоретической и практической частью, включающей также интерактивную часть, в которой учащийся постепенно закрашивает QR code, при решении уравнений, переходя по которому он попадает на телеграмм-канал с полезной информацией. Мы надеемся, что это простимулирует человека решать данные уравнения и является нашим преимуществом по сравнению с другими сборниками/ учебными пособиями и т.д.

Причины создания учебного пособия по тригонометрии:

1. Основа математического образования: Тригонометрия является одним из ключевых разделов математики, без знаний которой невозможно углубленное изучение многих дисциплин, таких как физика, инженерия, архитектура и информатика.

2. Развитие аналитического мышления: Изучение тригонометрии развивает логическое и аналитическое мышление студентов, помогает им лучше понимать взаимосвязи между различными математическими концепциями и применять эти знания в решении реальных задач.

3. Практическое применение: Тригонометрические функции находят широкое применение в различных сферах, включая навигацию, астрономию, медицину (например, в радиологии), что подчеркивает важность ее изучения для будущих специалистов.

4. Подготовка к экзаменам: Пособие по тригонометрии поможет студентам систематизировать знания и подготовиться к контрольным работам, экзаменам и олимпиадам, что повышает их уверенность в себе и мотивацию к учёбе.

5. Интерактивные методы обучения: Современные пособия могут включать интерактивные элементы, мультимедийные ресурсы и практические задачи, что делает процесс обучения более увлекательным и эффективным.

6. Совершенствование навыков решения задач: Пособие может содержать разнообразные примеры и задачи, кроме классовых, что способствует развитию навыков решения нестандартных задач и критического мышления.

7. Поддержка самостоятельного изучения: Пособия позволяют студентам учиться самостоятельно, что особенно важно в условиях дистанционного обучения и повышает их самостоятельность и ответственность за собственное образование.

8. Адаптация к различным уровням подготовки: Хорошее пособие учитывает разнообразные уровни подготовки студентов, предлагая материалы как для начинающих, так

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

и для более продвинутых учащихся, что способствует индивидуальному подходу к обучению.

9. Качество образования: Наличие качественного пособия по тригонометрии может способствовать общему улучшению уровня образования, так как студенты смогут овладеть необходимыми знаниями и навыками, что положительно скажется на их академической успеваемости.

10. Поддержка преподавателей: Пособия могут служить важным ресурсом для преподавателей, предоставляя готовые материалы, методические рекомендации и тесты, что упрощает процесс обучения и экономит время.

В своем проекте мы подняли вопрос тригонометрических уравнений. В свою очередь, они являются важнейшим и при этом самым сложным этапом изучения тригонометрии, который нередко вызывает затруднения у многих учеников. Именно поэтому очень важно подробно рассмотреть данную тему и изучить основные методы и способы решения данных уравнений. Мы постарались сделать путь человека по их решению увлекательным, интересным, а главное полезным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Ф. Прохоренко Учебное пособие для учащихся 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа – 2023. – с. 33-38.
2. И.В. Яковлев Тригонометрические уравнения – 2011.
3. Н.Е. Демидов Основы тригонометрии – 2011 – с.4-8.

АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НАСТРОЙКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ СЕРВЕРОВ VEGMAN

М.И. Аптуков, В.А. Кожевников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ aptukovm@yandex.ru

Для надёжной и эффективной работы современных серверов необходима настройка температурного режима системных вентиляторов, обеспечивающих интенсивный воздушный поток внутри корпуса и эффективный отвод тепла от нагреваемых компонентов.

Наиболее широко распространены Пропорционально-Интегрально-Дифференцирующие регуляторы [1]. Для того, чтобы устройство поддерживало заданный параметр на определенном уровне необходима настройка ПИД-регулятора, которая сводится к подбору величин трёх коэффициентов [2].

Некорректная настройка коэффициентов может привести к перегреву системы, к излишней скорости вентиляторов, вызывающей повышение энергопотребления и шум. Таким образом, автоматический подбор оптимальных коэффициентов ПИД-регулятора вентиляторов серверов является актуальной задачей.

В данной работе рассматривается программный вариант настройки температурного режима серверов VEGMAN с применением алгоритмов оптимизации. Приближенные (метаэвристические методы) являются наиболее эффективными для случая оптимизации многофакторной целевой функции. Согласно статье О.А. Щербиной [3] упрощенно можно рассматривать метаэвристики как алгоритмы, реализующие прямой случайный поиск возможных решений задачи, оптимальных или близких к оптимальным, пока не будет выполнено некое условие или достигнуто заданное число итераций.

Целью работы является выбор оптимального алгоритма, способного эффективно находить коэффициенты ПИД-регулятора, которые обеспечивают стабильную температуру процессора при минимально необходимой скорости вентиляторов. Для достижения поставленной цели реализованы на python и исследованы несколько алгоритмов оптимизации: метод роя частиц, муравьиный алгоритм, байесовская оптимизация и генетический алгоритм.

Идея алгоритма оптимизации роя частиц, предложенного Д. Кеннеди и Р. Эберхартом в 1995 году, частично заимствована из исследований поведения косяков рыб, стай птиц. Метод предназначен для поиска глобального экстремума сложных многофакторных функций, блок-схема метода представлена на рисунке 1. Метод прост в реализации, хорошо подходит для непрерывных задач, таких как подбор ПИД-коэффициентов. Недостатками являются риск преждевременной сходимости к локальному экстремуму и отсутствие гарантии нахождения глобального минимума за конечное число шагов.

Муравьиный алгоритм (рисунок 2), предложенный М. Дориго в 1992 году, воспроизводит поведение муравьёв при поиске оптимальных путей. Муравьи исследуют пространство решений, помечая траектории «феромоном», который направляет других муравьёв к более выгодным маршрутам [4]. Концентрация феромонов обновляется на каждой итерации. Муравьиный алгоритм имеет возможность адаптации к изменениям условий. К недостаткам относятся сложность настройки параметров алгоритма (интенсивности обновления и скорости испарения феромона) и медленная по сравнению с другими методами сходимость.

Байесовская оптимизация основана на построении вероятностной модели целевой функции. Она используется для оптимизации функций, где вычисление градиента невозможно или дорого [5]. Порядок выполнения байесовской оптимизации приведён на рисунке 3. Байесовская оптимизация эффективна при ограниченном числе экспериментов. Это важно

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

при настройке температурного режима серверов, так как проведение экспериментов (разгон процессора, разогрев системы при разных настройках) изнашивает оборудование. К недостаткам метода относятся необходимость вычислительных ресурсов для поддержки и обновления статистической модели на каждой итерации, а также сравнительная сложность реализации. Но эффективна при трёх параметрах (ПИД-коэффициентах) и небольшом числе итераций.



Рис.1. Блок-схема метода роя частиц



Рис.2. Блок-схема муравьиного алгоритма

Генетический алгоритм (рисунок 4), предложенный Д. Холландом в 1975 году, основан на процессах отбора, мутации и скрещивания, подобных биологическому геному. Применительно к задаче подбора ПИД-коэффициентов: на первом этапе создаём популяцию, в которой каждая особь представляет собой комбинацию ПИД-коэффициентов, затем, оцениваем работу системы с текущими коэффициентами. После каждой итерации коэффициенты обновляются и система тестируется в реальном времени.

На python разработаны программы, реализующие алгоритмы оптимизации. Программы протестированы на различных серверах VEGMAN. Сравнение эффективности применения различных алгоритмов для подбора коэффициентов ПИД-регулятора вентиляторов серверов VEGMAN представлено в таблице 1.

Табл.1. Эффективность применения различных алгоритмов оптимизации

Показатель	Метод роя частиц	Муравьиный алгоритм	Байесовская оптимизация	Генетический алгоритм
Число итераций	6	5	4	8
Амплитуда колебания температуры CPU, °C	2,5	3	2	3
Время стабилизации, мин	11	9	5	8
Сложность реализации	средняя	высокая	высокая	средняя

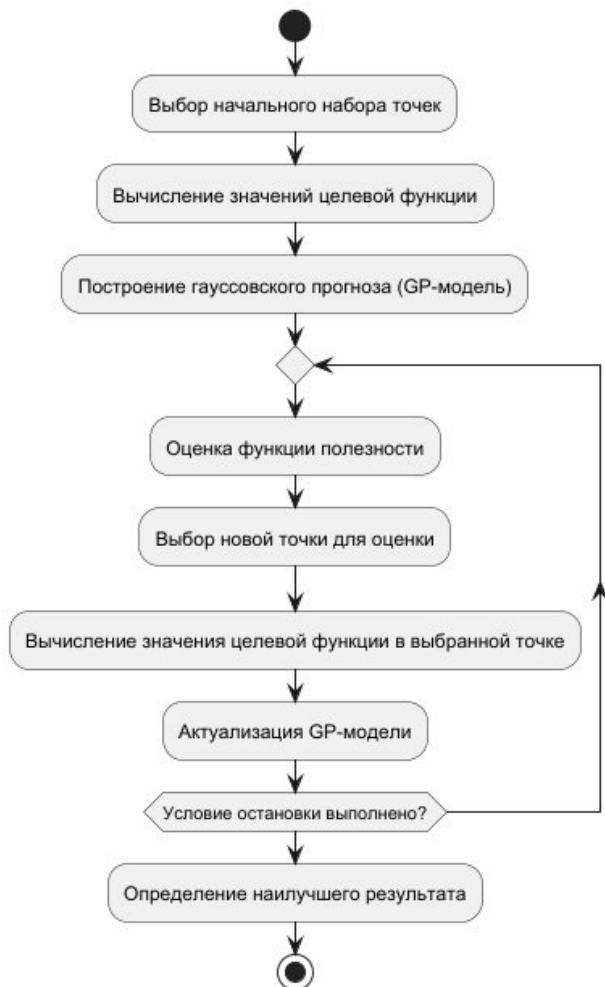


Рис.3. Порядок выполнения байесовской оптимизации



Рис.4. Блок-схема генетического алгоритма

Из рассмотренных методов наиболее целесообразным выбором для решения задачи автоматической настройки температурного режима серверов является байесовская оптимизация. Она обеспечивает быстрый поиск оптимальных параметров при минимуме испытаний.

Разработана программа автоматизированного подбора коэффициентов ПИД-регулятора вентиляторов сервера. В результате работы программы были получены графики, представленные на рисунках 5–8.

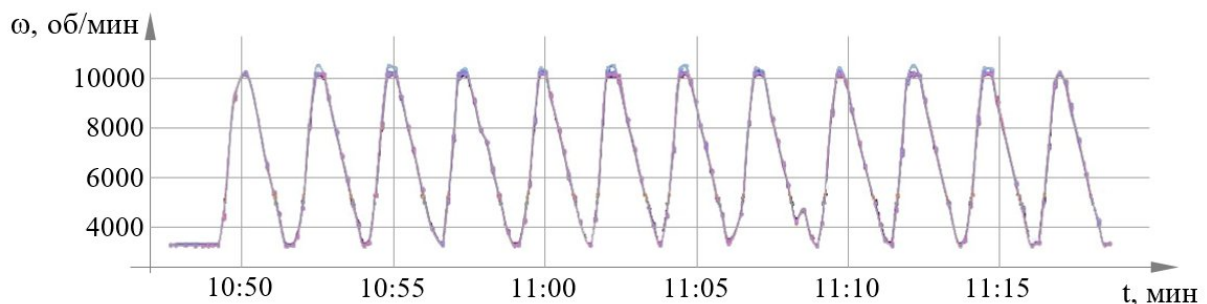


Рис.5. График скорости вращения вентилятора до подбора коэффициентов

В ходе работы удалось подобрать оптимальные коэффициенты, которые обеспечивают оптимальный температурный режим работы серверов VEGMAN, что повышает надёжность работы серверов.

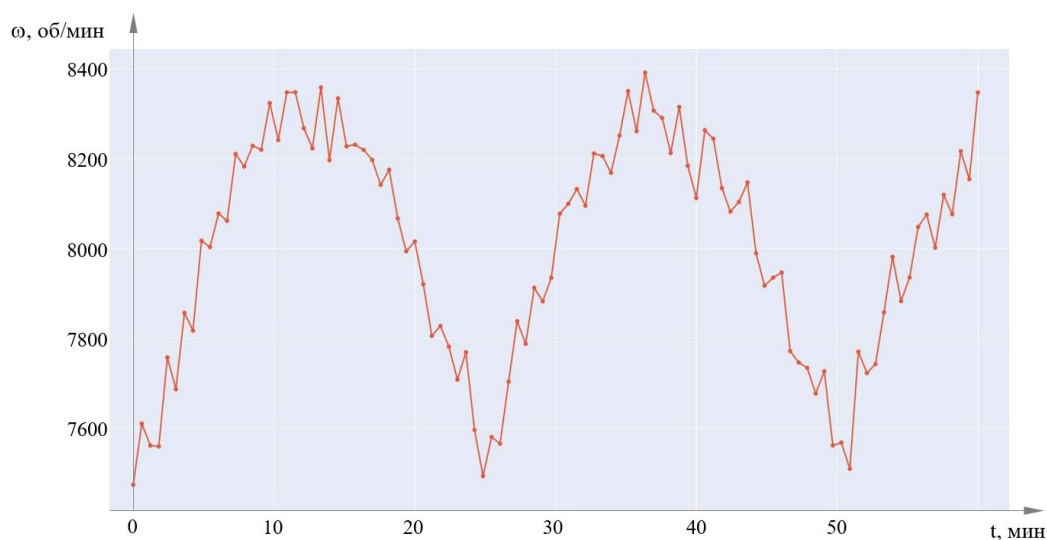


Рис.6. График скорости вращения вентилятора после подбора коэффициентов

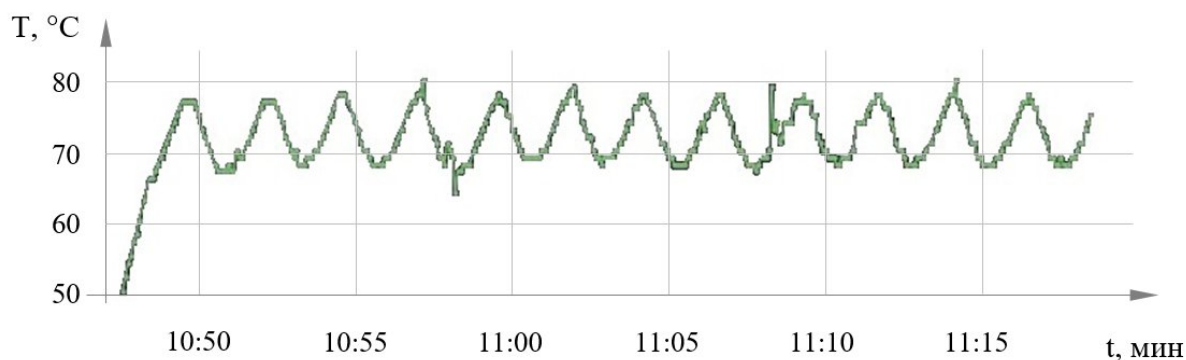


Рис.7. График температуры процессора до подбора коэффициентов

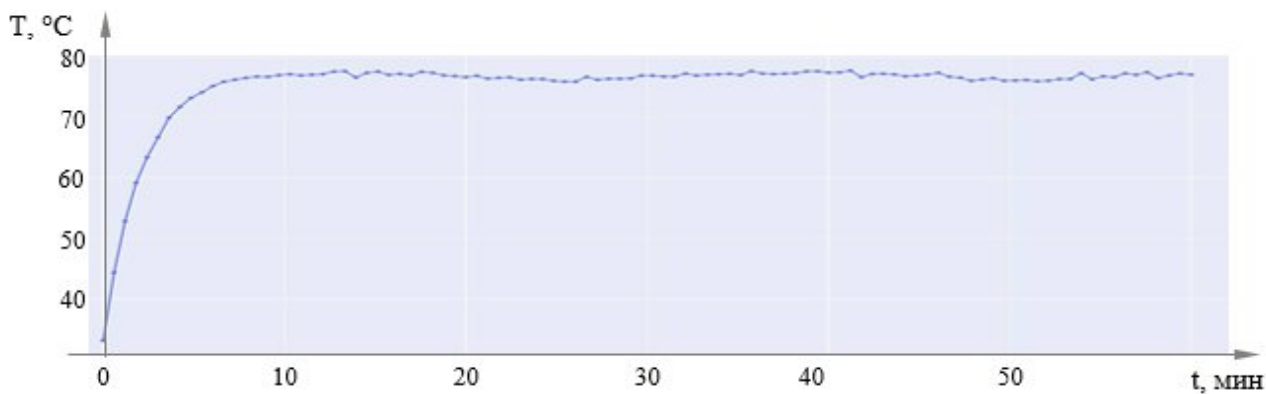


Рис.8. График температуры процессора после подбора коэффициентов

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисенко В.В. ПИД-регуляторы: вопросы реализации – Современные технологии автоматизации, 2008
2. <https://rusautomation.ru/articles/nastroyka-pid-regulyatora-temperature/>
3. Щербина О.А. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор) – Симферополь: Таврический вестник информатики и математики, 2014
4. Корте Б. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы – Московский центр непрерывного математического образования, 2015
5. Козак А.В., Сухов Н.Ю. Байесовская оптимизация – БГУИР, 2019.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В ЯКОРНО-ШВАРТОВНЫХ УСТРОЙСТВАХ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В.С. Володарский

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ v.s.volodarsky@yandex.ru

Статья посвящена математическому моделированию динамических нагрузок в якорно-швартовных устройствах, используемых для обеспечения устойчивости морских объектов. Рассматриваются фундаментальные подходы, включая вычислительную гидродинамику (CFD) и метод конечных элементов (FEM), для анализа взаимодействия воды, швартовных линий и якорей. Описаны физические принципы действия нагрузок, математическая постановка задачи и методы численного решения. Приведены примеры практического применения моделей для проектирования надежных систем, а также выявлены текущие ограничения и перспективы развития, включая использование искусственного интеллекта и многомасштабного моделирования. Результаты подчеркивают значимость интеграции CFD и FEM для повышения безопасности и эффективности морских сооружений.

Якорно-швартовные устройства обеспечивают устойчивость морских объектов — от грузовых судов до нефтяных платформ — в условиях волн, ветра и течений. Их надежность критически важна: например, платформа массой 50 тысяч тонн должна выдерживать штормы с волнами высотой до 15 метров, иначе возможны срывы, аварии и экологические катастрофы. Традиционные методы, основанные на простых расчетах вроде силы тяжести $F = mg$ не справляются с современными вызовами. Рост размеров судов, увеличение глубин эксплуатации и учащение экстремальных погодных условий требуют более точных подходов.

Динамические нагрузки зависят от множества факторов: высоты волн, скорости ветра, свойств грунта и конструкции системы. Эти силы сложны, переменчивы и нелинейны, что делает их прогноз сложной задачей. Математическое моделирование, включая вычислительную гидродинамику (CFD) и метод конечных элементов (FEM), позволяет анализировать эти нагрузки, предсказывать слабые места и оптимизировать дизайн. Оно помогает избежать избыточной прочности, снижая затраты, и повышает безопасность, предотвращая сбои.

История изучения таких систем началась с эмпирических оценок: в XIX веке инженеры рассчитывали удерживающую силу якоря через его вес и трение о грунт, добавляя большие запасы прочности. В XX веке с развитием науки появились аналитические методы, описывающие движение воды и деформацию материалов. Например, уравнения Навье-Стокса стали основой для анализа потоков, но их сложность ограничивала применение без компьютеров. [1]

В 1970-х годах CFD начала моделировать волны и течения, а FEM — анализировать напряжения в цепях и якорях через зависимость $\sigma = E\varepsilon$ (напряжение пропорционально деформации). Современные исследования фокусируются на случайных волнах и грунтовых взаимодействиях, но сталкиваются с проблемами: высокая вычислительная сложность и нехватка данных для проверки. Эта статья рассматривает, как эти методы развиваются и применяются в практике.

Якорно-швартовные системы испытывают постоянные и изменяющиеся нагрузки. Постоянные — это вес судна и цепей, а также подъемная сила, уменьшающая их массу в воде

$$F_b = \rho V g,$$

где ρ — плотность воды, V — объем). Эти силы предсказуемы и рассчитываются через равновесие. Изменяющиеся нагрузки приходят от волн, ветра и течений, создавая давление и

рывки. Например, волновая нагрузка зависит от высоты волны, а ветер толкает судно в зависимости от его парусности и скорости ветра.

Система нелинейна: цепь натягивается при отклонении судна, но провисает, когда нагрузка спадает. Якорь держится за грунт, и его устойчивость зависит от типа дна — песок, глина или камни. Основной принцип — движение под действием сил

$F = ma$, где нагрузки от воды включают инерцию и сопротивление. Эти идеи лежат в основе моделей, объясняя поведение системы в разных условиях.

Математическая постановка задачи в моделировании динамических нагрузок на якорно-швартовные устройства — это процесс превращения физических явлений, таких как движение воды и деформация цепей, в систему уравнений, которые можно решить с помощью компьютера. Это основа для методов вроде CFD и FEM, потому что без четкого описания, что происходит с водой, цепью, якорем и судном, моделирование было бы просто набором догадок. Здесь важно учесть все элементы системы — жидкость (море), твердые тела (цепи, якоря) и их взаимодействие — и описать их поведение в условиях волн, ветра и течений.

Первая часть задачи — понять, как движется вода вокруг якорно-швартовной системы. Вода — это не просто неподвижная масса: она течет, волнуется, завихряется, создавая давление и силы, которые тянут цепь или толкают судно. Для этого используются уравнения Навье-Стокса, которые описывают движение жидкости. В упрощенном виде они выглядят так:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g,$$

где ρ — плотность воды (около 1000 кг/м³ для морской воды), v — скорость потока, p — давление, μ — вязкость, g — гравитация (9.81 м/с²). Это уравнение говорит, что ускорение воды зависит от давления, трения внутри жидкости и силы тяжести. Например, когда волна накатывает на цепь, давление p возрастает, заставляя воду двигаться быстрее и передавать силу на звенья. [2]

Но вода не может течь как угодно: ее масса сохраняется. Это описывает уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

что значит, что если вода втекает в какой-то участок моря, столько же должно вытечь, иначе плотность изменится. В реальном море плотность почти постоянна, но скорость меняется — например, у поверхности волны ускоряют поток, а у дна течение может замедляться из-за трения о грунт. Для якорно-швартовной системы это важно: если вода быстро течет вокруг цепи, она создает большее сопротивление, усиливая нагрузку.

Описание твердых тел

Вторая часть — поведение твердых компонентов: цепей, тросов, якорей и креплений. Когда волна тянет цепь, она растягивается, а якорь сопротивляется движению в грунте. Это описывается уравнениями механики твердого тела.

$$\nabla \cdot \sigma + \rho b = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где σ — напряжение в материале (сила на единицу площади), ρ — плотность стали или троса, b — внешние силы (например, гравитация), u — перемещение. Это говорит, что ускорение цепи зависит от того, как напряжение распределяется внутри нее и какие силы на нее действуют.

Напряжение связано с деформацией через свойства материала:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где (E) — модуль упругости (для стали около 200 ГПа), ε — относительное удлинение. Например, если волна тянет цепь с силой 100 кН, она слегка растягивается, и FEM может рассчитать, где напряжение σ будет максимальным — скажем, в звене у крепления к судну.

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

Если нагрузка слишком велика, материал может выйти за предел упругости и порваться, что важно предсказать.

Чтобы уравнения работали, нужно задать, что происходит на границах системы.

Поверхность воды: Волны создают давление и движение. Высота волны η меняется, и вода у поверхности ускоряется, передавая силу на цепь или судно. Давление здесь зависит от высоты:

$$p = \rho g \eta + p_{\text{atm}},$$

где p_{atm} — атмосферное давление. Например, волна высотой 5 метров добавляет давление около 50 кПа, толкая систему.

Морское дно: Якорь взаимодействует с грунтом, сопротивляясь сносу. Удерживающая сила зависит от площади якоря и свойств грунта — песка, глины или камней. Это можно приближенно записать как

$$F_{\text{hold}} = cA,$$

где c — сцепление грунта, A — площадь. Если якорь зацепился за песок, он может скользить, если сила тяги превысит это значение. [3]

Самое сложное — связать воду и твердые части. Когда волна ударяет по цепи, она передает силу, цепь натягивается, а это натяжение меняет, как вода течет вокруг нее. Это называется взаимодействием жидкости и структуры (Fluid-Structure Interaction, FSI). Например, если цепь провисает, она меньше сопротивляется воде, но если натягивается, поток вокруг нее ускоряется, усиливая давление. CFD рассчитывает силы от воды, а FEM — как цепь на них реагирует, и эти данные передаются друг другу.

Представьте шторм: волна высотой 10 метров бьет по цепи, создавая давление и ускорение воды. CFD моделирует, как эта волна движется и давит на звенья, а FEM проверяет, выдержит ли цепь натяжение или порвется. Затем движение цепи обновляет поток воды в модели, и расчет повторяется. Это делает задачу нелинейной: небольшие изменения в одном месте (скажем, провисание цепи) могут сильно повлиять на другое (натяжение у якоря).

Уравнения нелинейны и зависят от множества факторов: случайных волн, турбулентности, неровного дна. Аналитически их решить нельзя — нет простой формулы, которая скажет, как вода потечет вокруг цепи в шторме. Поэтому используются численные методы:

CFD разбивает море на сетку из миллионов ячеек и считает давление и скорость в каждой, шаг за шагом.

FEM делит цепь на маленькие кусочки и анализирует напряжение в каждом звене.

Для якорно-швартовой системы это значит, что нужно смоделировать, как волна тянет цепь с силой, зависящей от скорости воды v , и как эта сила растягивает сталь. Например, если скорость течения 2 м/с, а площадь цепи 0.1 м², сопротивление может достигать десятков килоньютон, что передается на якорь и судно.

Постановка задачи — фундамент для проектирования. Она позволяет предсказать, выдержит ли цепь нагрузку в 500 кН в шторме, или сорвется ли якорь из песка при силе 200 кН. Без нее инженеры полагались бы на грубые оценки, добавляя лишний вес системе, что дорого и неэффективно. Численные методы превращают эти уравнения в реальные данные, помогая сделать системы надежными и экономичными. [4]

CFD моделирует движение воды, разбивая море на участки и рассчитывая, как волны и течения давят на систему. Это помогает понять, как нагрузки распределяются по цепи или судну:

$$F_h = C_d \frac{1}{2} \rho A v^2,$$

где C_d — коэффициент сопротивления. Метод точен, но требует больших вычислительных ресурсов, особенно для хаотичных течений.

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

FEM анализирует твердые части, деля их на кусочки и изучая деформации. Он показывает, где цепь может порваться при высоком натяжении

$$T = \frac{F}{\cos \theta},$$

где θ — угол наклона. Это идеально для поиска слабых мест, но зависит от точных данных о силах.

Гибридные методы объединяют CFD и FEM, чтобы видеть взаимодействие воды и твердых частей. Это сложнее, но реалистичнее, позволяя анализировать систему целиком — от волн до напряжений в звеньях.

Модели помогают выбирать материалы и размеры. Если расчеты показывают высокое натяжение, цепь усиливают, а если якорь скользит, меняют его форму. Это экономит ресурсы и повышает безопасность, оптимизируя систему под реальные условия. [5]

Проверка идет через сравнение с опытами — в бассейнах или на судах. Например, измеренное натяжение цепи сравнивают с расчетным $T_{model} \approx T_{exp}$, корректируя модель для точности.

Для платформы в Северном море модели показали нагрузку 500 кН и напряжение близкое к пределу. Усиление цепей снизило риск, что подтвердилось в шторме, доказав ценность расчетов.

Случайность волн и грунта усложняет прогнозы, а большие расчеты требуют мощных компьютеров. Нехватка данных для проверки остается проблемой.

Искусственный интеллект ускоряет анализ, адаптивные модели работают в реальном времени $F(t)$ обновляется мгновенно, а многомасштабность связывает крупные и мелкие эффекты, улучшая точность. [

Моделирование с CFD и FEM делает системы надежнее, предсказывая нагрузки и напряжения

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Это экономит ресурсы и снижает риски. Гибридные методы и автоматизация открывают путь к будущему, где проектирование станет быстрее и умнее, защищая суда от стихии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительная гидродинамика: основы и приложения / Дж. Н. Верстак, К. А. Малпасс. — 2-е изд. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 548 с.
2. ANSYS Mechanical User's Guide: Finite Element Analysis of Structures. — Release 19.0. — Canonsburg, PA: ANSYS Inc., 2018.
3. A hybrid time/frequency domain approach for efficient coupled analysis of vessel/mooring/riser dynamics // Ocean Engineering. — 2008. — Vol. 35, No. 5-6. — pp. 433–446.
4. Finite element analysis of mooring systems under extreme environmental conditions // Marine Structures. — 2013. — Vol. 33. — pp. 1–19.
5. Численное моделирование гидродинамических процессов в морских системах // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия. — 2019. — № 4. — С. 45–53.

СОЗДАНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ВОССОЗДАНИЯ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Е.Ю. Гвоздев, В.М. Дорошенко, М.Н. Гришин, И.О. Губарь
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
✉ yevgeniy_gvozdev@mail.ru

Введение. Двигатели внутреннего сгорания (ДВС) по-прежнему играют ключевую роль в современной транспортной индустрии, несмотря на растущий интерес к электрическим и гибридным силовым установкам. Оптимизация существующих конструкций ДВС и разработка новых, более эффективных и экологичных, требуют глубокого понимания сложных физических процессов, происходящих внутри цилиндра. В связи с этим, компьютерно-математическое моделирование (КММ) становится незаменимым инструментом для исследований и разработок в области ДВС [1].

Основные принципы компьютерно-математического моделирования ДВС. Метод основан на очень точном физическом двигателе - то есть программе, которая рассчитывает, как будут взаимодействовать твердые тела (цилиндры, поршни, маховики), газы (воздух), топливо, скорость распространения огня, сколько энергии выделяет сгорание воздушно-топливной смеси и так далее. Подобные программы помогают исследовать самые смелые конструкции и режимы работы, на которые, в отсутствие данных модуляторов, не дали бы разрешения для испытаний. Благодаря современным вычислительным технологиями подобный симулятор позволяет повышать надежность и эффективность разработки, а также доведения до совершенства двигателей внутреннего сгорания. Рассмотрим конкретные задачи КММ на примере одной из целевых аудитории – автоспортивных команд [2].

Основные задачи компьютерно-математического моделирования ДВС. В современном автоспорте, особенно в Формуле 1 (F1) и Чемпионате мира по гонкам на выносливость (WEC), ДВС остаются критически важными элементами гибридных силовых установок. Учитывая строгие регламенты, ограничивающие объем топливного бака и потребление топлива, достижение максимальной эффективности и мощности ДВС является ключевым фактором для победы. Компьютерно-математическое моделирование (КММ) играет определяющую роль в этой борьбе, позволяя командам оптимизировать каждый аспект работы двигателя [3].

В условиях жестких ограничений на количество двигателей на сезон (F1) и необходимости прохождения дистанции гонки на минимальном количестве топлива (WEC), КММ становится незаменимым инструментом для достижения конкурентоспособности. Традиционные методы испытаний на стенде остаются важными, но они не способны обеспечить такой уровень детализации и гибкости, как КММ. Кроме того, КММ позволяет исследовать гипотетические сценарии и конструкции, которые было бы невозможно или слишком дорого реализовать физически. Ключевые области применения КММ в F1 и WEC:

- Оптимизация камеры сгорания: Геометрия камеры сгорания оказывает существенное влияние на эффективность сгорания и детонационную стойкость. КММ позволяет командам точно моделировать процессы сгорания при различных формах камеры, расположении свечи зажигания и форсунок, выявляя оптимальную конфигурацию для каждой конкретной трассы и условий гонки. Для анализа влияния формы камеры сгорания на процесс сгорания используется уравнение энергии для сплошной среды (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (V) \rho h \, dV + \oint (A) \rho h (v) \cdot (n) \, dA = \oint (A) (q) \cdot (n) \, dA + \int (V) S \, dV \quad (1)$$

Где: ρ - плотность;

h - энтальпия;

(v) - вектор скорости;

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

- (n) - нормаль к поверхности;
- (q) - тепловой поток;
- S - источник тепла (сгорание).

КММ позволяет анализировать влияние различных геометрий на распределение температуры и скорости газов, что напрямую влияет на скорость и полноту сгорания;

- Управление наддувом и турбокомпрессором;
- Оптимизация впрыска топлива;
- Управление детонацией;
- Оптимизация системы охлаждения;
- Интеграция с системами управления двигателем (ECU).

Команды F1 и WEC используют передовое коммерческое и собственное программное обеспечение для КММ, такое как ANSYS Fluent, CONVERGE, STAR-CCM+, а также разрабатывают собственные алгоритмы и модели для решения специфических задач. Они также активно используют вычислительные ресурсы суперкомпьютеров для проведения сложных и ресурсоемких расчетов [3].

Использование КММ приносит на практике такие вещи как:

- Повышение мощности и эффективности двигателей: КММ позволяет командам F1 и WEC выжимать максимум из своих двигателей, повышая их мощность и эффективность.
- Снижение расхода топлива. В условиях строгих ограничений на топливо, КММ позволяет оптимизировать работу двигателя для достижения минимального расхода.
- Повышение надежности. КММ помогает выявлять потенциальные проблемы в конструкции двигателя и разрабатывать решения для их устранения.
- Сокращение времени разработки. КММ позволяет командам быстро оценивать различные конструктивные решения и выбирать наиболее перспективные варианты.
- Улучшение результатов на трассе. В конечном итоге, использование КММ позволяет командам F1 и WEC улучшать свои результаты на трассе и бороться за победу [3].

В F1 и WEC, где каждая тысячная доля секунды имеет значение, КММ является неотъемлемой частью процесса разработки и оптимизации двигателей. Благодаря КММ, инженеры могут выявлять мельчайшие детали, которые приводят к повышению эффективности и мощности, позволяя командам бороться за чемпионство. Дальнейшее развитие КММ, с использованием искусственного интеллекта и машинного обучения, обещает еще более значительные прорывы в области разработки высокопроизводительных двигателей для автоспорта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горностаева Т.Н., Горностаев О.М. Математическое и компьютерное моделирование. Учебное пособие– М.: Мир науки, 2019. – 111 с.
2. Википедия – Физический двигатель. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Физический_двигок (дата обращения: 14.03.2025)
3. Ньюи Э. Как построить машину. Автобиография величайшего конструктора «Формулы-1». Изд. 1-е. – М.: Эксмо, 2019. – 178 с.

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКВИВАЛЕНТОВ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

М.Н. Гришин, И.О. Губарь, Е.Ю. Гвоздев, В.М. Дорошенко
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
✉ mikhail.grisch2016@yandex.ru

Введение. Современные радиотехнические системы, применяемые в космических приложениях, работают в условиях высокой неопределенности, вызванной воздействием внешних факторов, таких как вакуум, температурные колебания, космическая радиация и многолучевое распространение сигналов. Традиционные методы моделирования, основанные на детерминированных подходах, часто оказываются недостаточно эффективными из-за необходимости учета большого числа случайных параметров и высокой сложности вычисления. В связи с этим метод статистических эквивалентов становится важным инструментом для анализа и проектирования таких систем.

Основные принципы метода статистических эквивалентов. Метод статистических эквивалентов основан на замене случайных процессов их статистическими характеристиками, такими как математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и спектральная плотность мощности. Это позволяет сократить вычислительную сложность моделирования, при этом сохраняя достаточную точность для анализа [1].

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$ (рис. 1), который может описывать, например, сигнал в радиоканале. Вместо моделирования всех возможных реализаций $X(t)$, метод статистических эквивалентов использует его статистические параметры:

$$m_X(t) = E[X(t)] \quad (\text{Математическое ожидание});$$

$$D_X(t) = E[(X(t) - m_X(t))^2] \quad (\text{Дисперсия});$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (\text{Корреляционная функция}).$$

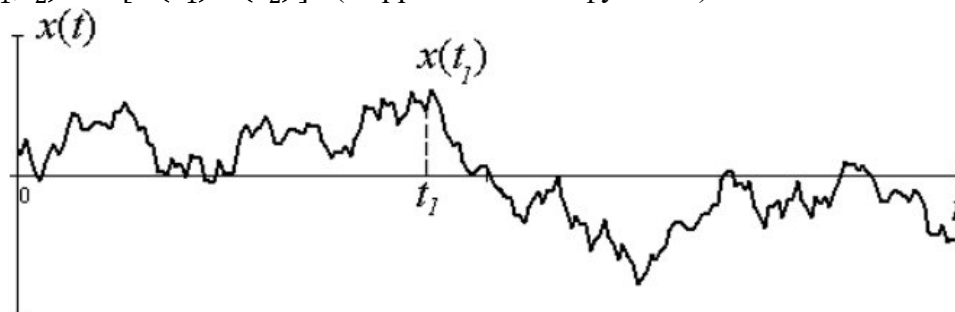


Рис. 1. Реализация случайного процесса времени

Для стационарных процессов корреляционная функция зависит только от разности временных аргументов:

$$R_X(\tau) = R_X(t_1 - t_2) [2].$$

Применение метода в задачах моделирования радиотехнических систем. В космических радиоканалах сигналы подвержены замираниям, многолучевому распространению и другим случайным эффектам. Метод статистических эквивалентов позволяет описать такие каналы через их статистические характеристики. Например, замирания сигнала могут быть описаны с помощью функции распределения Рэлея (рис. 2):

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{Рэлеевское распределение}),$$

где r — амплитуда сигнала, σ^2 — дисперсия.

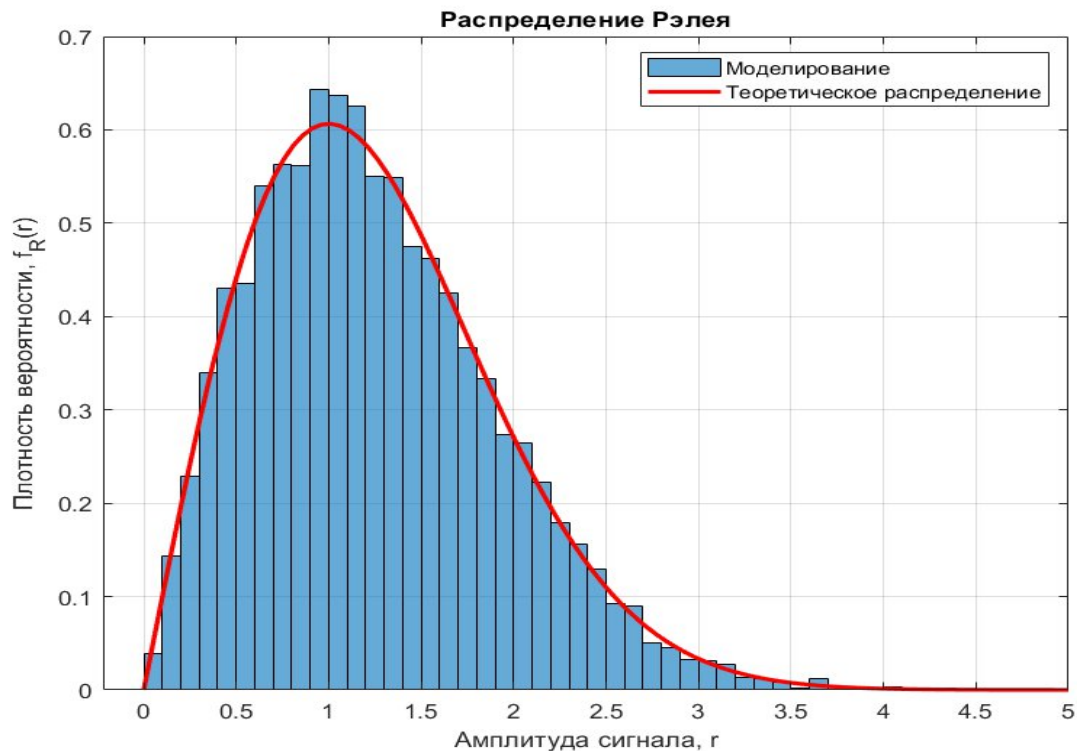


Рис. 2. Моделирование Рэлееской плотности распределения вероятностей

Антенные системы в космических аппаратах подвержены влиянию таких внешних факторов, как космическая радиация и температурные колебания. Метод статистических эквивалентов позволяет учесть эти факторы через их статистические параметры. Например, температурные колебания (рис. 3) могут быть описаны как случайный процесс с заданным математическим ожиданием и дисперсией:

$$T(t) = T_0 + \Delta T(t),$$

где T_0 — средняя температура, $\Delta T(t)$ — случайное отклонение.

В условиях ограниченных ресурсов бортовой аппаратуры космических аппаратов метод статистических эквивалентов позволяет оптимизировать передачу данных, учитывая статистические характеристики помех и шумов. Например, вероятность ошибки при передаче данных может быть оценена через функцию распределения шума:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(n) dn,$$

где $f_N(n)$ — плотность распределения шума[3].

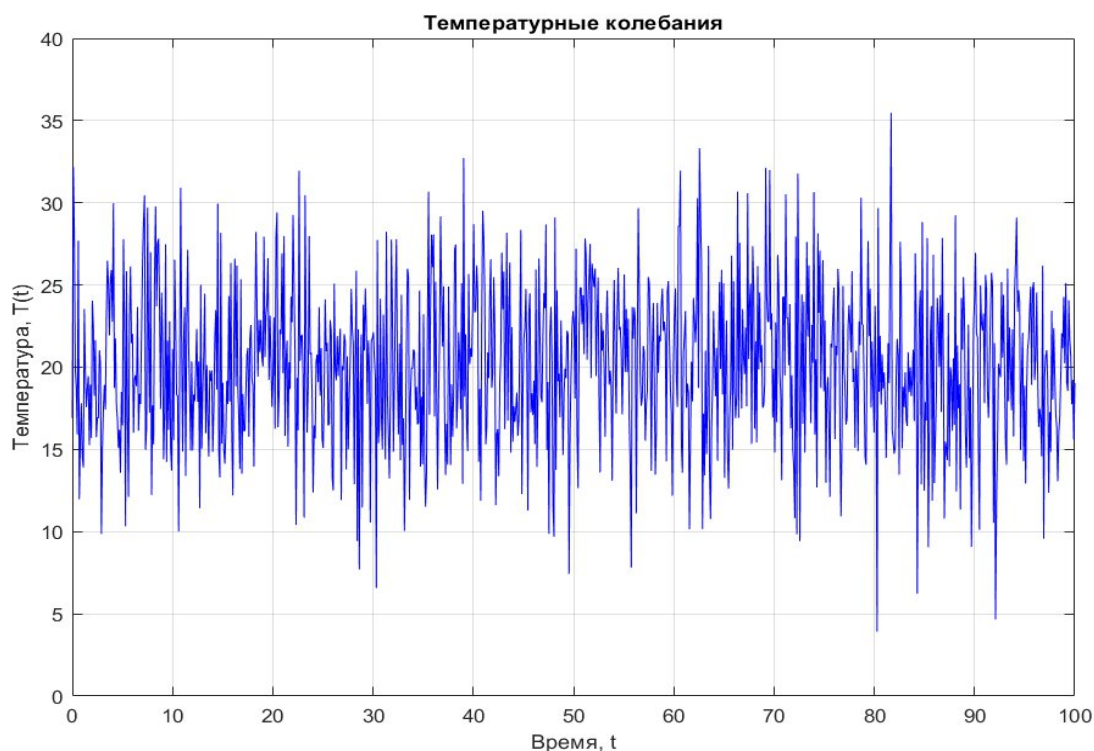


Рис. 3. Моделирование температурных колебаний

Метод статистических эквивалентов является эффективным инструментом для моделирования радиотехнических систем в космических приложениях. Он позволяет учитывать случайные факторы, такие как помехи, шумы и внешние воздействия, через их статистические характеристики, что значительно сокращает сложность вычисления и моделирования. Применение метода в сочетании с современными вычислительными технологиями открывает новые возможности для повышения эффективности и надежности радиотехнических систем в космической отрасли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.
2. Иванов А.В., Петров Б.С. Методы статистического моделирования в радиотехнике. – М.: Наука, 2018.
3. Сидоров В.И. Моделирование радиотехнических систем для космических приложений. – СПб.: Политехника, 2020.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ НЕЙРОНОПОДОБНОЙ АКТИВНОСТИ В СЛОЖНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКИ УСТРОЕННОЙ СЕТИ КАК МОДЕЛЬ ЛИМБИЧЕСКОЙ ЭПИЛЕПСИИ

Н.М. Егоров^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Научно-производственное предприятие «НПП Итэлма», Москва

✉ nm.egorov@itelma.su

Введение. Работа головного мозга притягивает умы многих учёных, как неразгаданная загадка мироздания, описав которую можно будет лучше понять устройство жизни, место возникновения мыслей, причины возникновения нормальных и патологических состояний мозга. На настоящий момент у учёных уже есть базовые представления об устройстве головного мозга, какие клетки, как и с кем взаимодействуют[1], однако для наиболее полного понимания работы мозга пока что нет модели, которая описывает всё в достаточных деталях в приемлемых диапазонах вычислительных мощностей, поэтому приходится идти на компромисс и рассматривать либо работу мозга целиком в виде макромоделей, либо отсекая менее важное, концентрироваться на конкретных областях и частных случаях. Поэтому в данной работе речь пойдёт о частном случае активности мозга, о приступе эпилепсии.

Эпилепсия является одним из заболеваний головного мозга, которое на настоящий момент не является достаточно изученным, чтобы найти лекарство, которое полностью избавит человека от данного заболевания. Согласно современным представлениям об эпилепсии[2], приступ происходит в ответ на определённое внешнее воздействие, после чего некоторые нейроны начинают проявлять синхронизованную активность до момента прекращения приступа. Таким образом эпилепсия является следствием определённой организации нейронов. Для данного частного случая можно представить головной мозг сетью осцилляторов, которые могут синхронизироваться в ответ на подачу внешнего воздействия, чем и посвящена данная работа.

Модель головного мозга. В данной работе модель головного мозга представляет собой сеть иерархически связанных модельных нейронов. В качестве одного модельного нейрона выступает относительно простая модель нейроноподобной активности - осциллятор ФитцХью-Нагумо (1, 2). Для имитации синаптической связи между нейронами, осцилляторы связаны через функцию гиперболического тангенса с задержкой и со смещением делёного напополам.

$$\varepsilon \dot{u}_i(t) = u_t(t) - c_i u_i^3(t) - v_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{ij} \frac{1 + \tanh}{2}$$

$$\dot{v}_i(t) = u_i(t) + a_i - b_i v_i(t),$$

где u – безразмерная переменная, характеризующая трансмембранный ток, v – безразмерная переменная, характеризующая ток восстановления, t – безразмерное время, ε – параметр инерционности, a – безразмерный параметр, управляющий собственной динамикой нейрона, c – константа интегрирования равная $1/3$, k – коэффициент связи, b – безразмерный коэффициент также управляющий собственной динамикой нейрона, τ – величина задержки, имитирующая задержку при прохождении сигнала через синапс.

Сама же сеть представляет собой полуслучайную структуру клеток, следующую заданным правилам взаимодействия, то есть нейроны между собой отличаются только тем, кто на кого воздействует. Таким образом нейроны можно разделить на пирамидальные,

таламо-кортикальные, ретикулярные и интернейроны [3]. Для воспроизведения приступоподобной активности лимбической эпилепсии внутри сети также имеется кольцевой контур нейронов, который введён для усиления синхронизирующей способности сети, а также возможности перестройки частоты разряда во время приступа, так как приступ лимбической эпилепсии характеризуется разной частотой колебаний в начале и конце приступа[4].

Расчёты проводились в соответствии с принципами аналогового моделирования в симуляторе электрических цепей[3]. Данный подход позволит в дальнейшем реализовать данную модель в железе, что приблизит поведение модели к реальным нейронам, в частности флуктуации электро-магнитного поля, шумы, влияние температуры и прочее.

Результаты. Для моделирования было спроектировано несколько конфигураций нейронных сетей. Некоторые из них показывали квазихаотичное поведение без какого-либо внешнего воздействия. При подаче внешнего воздействия на один из нейронов сети, вся сеть изменяла своё поведение на более периодическое, в некоторых случаях наступала синхронизация с увеличением амплитуды суммарного сигнала всех нейронов одного типа. После прекращения подачи внешнего воздействия, система возвращалась к своему нормальному поведению, что схоже с тем, как происходит восстановление активности мозга после завершения приступа лимбической эпилепсии.

В модели имеется множество параметров, которые так или иначе влияют на общую активность сети и на способность сети к синхронизации во время появления сигнала внешнего воздействия. В дальнейшем необходимо воспроизвести и изучить механизм перестройки частоты во время разряда для приближения к реальному механизму появления приступа эпилепсии.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-12-00176.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольнова А.Б., Ленков Д.Н. Абсансная эпилепсия: механизмы гиперсинхронизации нейронных ансамблей. Медицинский академический журнал. 2012;12(1):3-15.
2. О. В. Масленников, М. М. Пугавко, Д. С. Щапин, В. И. Некоркин, “Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей”, УФН, 192:10 (2022), 1089–1109; Phys. Usp., 65:10 (2022), 1020–1038. DOI: 10.3367/UFN.2021.08.039042.
3. Егоров Н. М., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Сысоева М. В. Имитационное моделирование эпилептиформной активности сетью нейроподобных радиотехнических осцилляторов // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, № 3. С. 519–528. DOI: 10.21883/JTF.2021.03. 50532.237-20.
4. Сысоева М. В., Виноградова Л. В., Перескис М., ван Рейн К. М., Сысоев И. В. Выявление изменений направленных межструктурных связей при лимбических судорогах, вызванных введением антагониста эндоканнабиноидных рецепторов, методом нелинейной причинности по Грейнджеру // Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова. 2019. Т. 69, № 6. С. 752–767. DOI: 10.1134/S0044467719060121.

НАРУШЕНИЕ МЕЖПОЛУШАРНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗАННОСТИ ПОСЛЕ ФОКАЛЬНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ МОЗГА И РАЗВИТИЯ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ

Д.А. Лачинова

Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН

✉ lachinova-dasha@yandex.ru

Исследование нейросетевых механизмов работы мозга – актуальная и сложная задача. Ключевой особенностью работы нейронных сетей являются быстрые динамические изменения функциональных связей между областями мозга в ответ на внешние и внутренние воздействия.

Распространяющаяся деполяризация (РД) – это волна интенсивной клеточной деполяризации, являющаяся важным компонентом острой реакции мозга на его повреждение (инсульт, черепно-мозговая травма) или гипервозбуждение (судороги) [1]. Предполагается, что РД может участвовать в расширении области повреждения, развитии отставленных инсультов, когнитивных и психоэмоциональных нарушений [2]. Поэтому сейчас РД признана важной мишенью мониторинга и терапии у пациентов с острым повреждением головного мозга. Влияние РД на функционирование нейронных сетей практически не исследовано, хотя представляет большой интерес, учитывая тесную связь разных форм нейропатологии с нейросетевыми нарушениями.

Межполушарные взаимодействия играют ключевую роль в обеспечении когнитивных функций, соматосенсорной интеграции и поддержании сознания. При многих заболеваниях нервной системы (аутизме, шизофрении) описана аномальная связность между корой двух полушарий мозга. При острой фокальной дисфункции (инсульте, приступах мигрени, фокальных судорогах) РД возникает в одном полушарии мозга. Мы предположили, что развитие односторонней волны РД может нарушать межполушарную функциональную связность и вносить вклад в патогенез заболеваний ЦНС. Для проверки этой гипотезы мы использовали экспериментальную модель фокального повреждения коры крыс и исследовали динамику межполушарной функциональной связности после повреждения. Оценку связности проводили на основе анализа временных рядов, полученных при регистрации электрической активности коры двух полушарий.

Электрофизиологический эксперимент проводился на взрослых крысах-самцах линии Wistar ($n=7$) в условиях свободного поведения. 600-секундные записи экспериментальных сигналов фронтальной коры обоих полушарий были получены до и после одностороннего фокального повреждения. Записи, полученные до повреждения, использовались для оценки фонового уровня связности. Фрагменты делили на 20-секундные неперекрывающиеся последовательные интервалы. Для определения динамики связности были рассчитаны статистические меры: функция взаимной информации (нелинейная, частотно неразрешённая мера ненаправленного взаимодействия) [3] и энтропия переноса (функция для определения направленной связности) [4]. Поскольку полученные результаты оценок связностей для отдельного животного могут носить случайный характер и отражать индивидуальные особенности животных, было принято решение перейти к усреднению значений.

Фокальное повреждение коры всегда приводило к возникновению волны РД, которая распространялась во фронтальные области коры поврежденного полушария, но не проникала в кору противоположного (неповрежденного) полушария. Возникновение РД определялось по характерным медленным сдвигам внеклеточного потенциала.

На основе статистической оценки полученных мер зафиксировано достоверное падение значений функции взаимной информации в течение трех минут после прохождения волны РД.

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

В этот период наблюдали практически независимую динамику активности коры двух полушарий. Расчёт энтропии переноса показал, что на этих же временных интервалах (но с задержкой по отношению к началу падения взаимной информации) имеется значимое увеличение воздействия со стороны неповрежденного и незатронутого волной РД полушария на повреждённое при отсутствии изменений в обратном направлении. Такой процесс может быть интерпретирован, как попытка неповреждённого полушария навязать свою динамику повреждённому и таким образом в рамках пластичности мозга восстановить нормальную динамику электрической активности коры. Для большинства животных этот процесс завершился успешно и меры связанности через 350-400 с вернулись к фоновым значениям. Полученные данные указывают на высокую функциональную пластичность нейронных сетей в бодрствующем мозге и их быструю реорганизацию в ответ на одностороннюю дисфункцию.

Далее мы оценили влияние внутрикоркового торможения на обнаруженные изменения функциональной связности. Были проведены эксперименты с фармакологическим ослаблением тормозных процессов в мозге (введение пентилентетразола - блокатора тормозных взаимодействий между нейронами). Растормаживание коры не влияло на развитие РД, но ослабляло (функция взаимной информации) или полностью устраняло (энтропия переноса) изменения межполушарной связности после РД. Полученный результат предполагает, что выявленные нейросетевые изменения связаны с активацией тормозных межнейронных связей.

Кроме этих динамических изменений, было обнаружено, что повышение возбудимости мозга и ослабление торможения достоверно меняет базовый уровень межполушарной связности, рассчитанный с помощью обеих мер - функции взаимной информации и энтропии переноса. Учитывая, что нарушение тормозных процессов описано при многих неврологических заболеваниях, наблюдаемые изменения базовой функциональной связности между полушариями могут быть вовлечены в патогенез этих заболеваний.

Полученные результаты предполагают, что кратковременная дисфункция коры одного из полушарий (волна РД) вызывает временное функциональное разобщение поврежденного и неповрежденного полушарий и активирует защитные нейросетевые механизмы, направленные на восстановление нарушенной функции.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-15-00327.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinogradova L.V., Suleymanova E.M., Medvedeva T.M. Transient loss of interhemispheric functional connectivity following unilateral cortical spreading depression in awake rats // Cephalalgia. – 2021. – Vol. 41 (3). – P. 353-365.
2. Hartings J.A. Spreading depolarization monitoring in neurocritical care of acute brain injury // Curr. Opin. Crit. Care. – 2017. – Vol. 23 (2). – P. 94-102.
3. Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P. Estimating mutual information // Physical review E. – 2004. – V. 69 (6). – P. 066138.
4. Schreiber T. Measuring information transfer // Physical review letters. – 2000. – V. 85(2). – P. 461-464. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.461.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИМУЛЯТОРОВ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Л.В. Такашвили¹, В.И. Пономаренко^{1,2}, И.В. Сысоев^{1,3}

¹Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

✉ nar7187@yandex.ru

Введение. Разработка искусственных нейронов является необходимым шагом как в области искусственного интеллекта, так и в области нейропротезирования. В дополнение к этим приложениям фундаментальные исследования, направленные на механизмы функционирования мозга, также требуют аппаратных моделей мозговых сетей и систем. С момента первой аппаратной реализации [1] было предложено несколько схем для реализации электронного нейрона. Некоторые реализации были направлены на улучшение исходной схемы Маховальда и Дугласа [2,3]. В последующих исследованиях были реализованы схемы различных математических моделей с использованием электронных компонентов, включая модель ФицХью-Нагумо [4,5,6,7], модель Морриса-Лекара [8] и упрощенные версии модели Ходжкина-Хаксли [9,10,11].

Основная проблема реализации математических моделей нейронов — построение сложных нелинейных функций, часто требующих множества дифференциальных усилителей и компараторов, что усложняет устройства. Поэтому модель Фицхью–Нагумо наиболее популярна для электронной реализации. Альтернативный подход — создание схем, имитирующих поведение нейронов, без непосредственной реализации уравнений, как, например, в системе фазовой автоподстройки частоты [12]. Этот подход оправдан, так как большинство нейронов мозга активируются в ответ на входные сигналы, а не генерируют активность самостоятельно. Важным этапом является разработка и тестирование схемы, для чего используются симуляторы аналоговых и цифровых схем. Однако выбор симулятора остаётся открытым вопросом. В данной работе проведён сравнительный анализ различных симуляторов на одной и той же схеме с разбором различий в результатах.

Основная часть. Мы доработали схему из [4] под свои задачи, разделив её на три участка: с операционным усилителем, диодами и колебательным контуром. В симуляции использовались модели реальных компонентов, что привело к расхождениям между симуляторами из-за различий в их библиотеках.

Диоды 1N4148 присутствовали во всех симуляторах, а вот операционный усилитель LM358 отсутствовал в стандартных библиотеках LTspice и QSPICE. Для LTspice мы заменили его на AD822, считая это не критичным для результата. В QSPICE, имеющем ограниченную библиотеку, но удобный импорт моделей, мы загрузили LM358 вручную.

Параметры компонентов: $R_1, R_3 = 1 \text{ кОм}$, $R_4 = 2,1 \text{ Ом}$, $L_1 = 1 \text{ мГн}$, $C_1 = 33 \text{ мФ}$, R_2 (потенциометр) изменяется от 500 до 1650 Ом, влияя на форму колебаний. Симуляции проводились при $t = 0,1 \text{ с}$, с максимальным шагом $T_{MAX} = 5 \times 10^{-6} \text{ с}$, остальные параметры оставались по умолчанию.

Для проверки схемы мы использовали такие симуляторы, как Multisim, LTspice, QSPICE, Ngspice. Также для сравнения были использованы данные из аппаратной реализации. В данной работе мы не будем останавливаться на непосредственном изучении сигнала, так как по форме сигналы совпадают во всех симуляторах. Так что мы считаем, что достаточно провести анализ амплитуды сигнала от сопротивления резистора R_2 . При симуляции использовалось разное количество диодов $n = 1, 3, 5$ именно в таких случаях форма сигнала значительно отличается друг от друга. В случае с 1 диодом $n=1$ (Рис.1(а)), мы видим что результаты всех симуляторов кроме Ngspice и аппаратной реализации очень близки, и качественно можно сказать что их

алгоритмы просчитали похожие значения. При $n=3$ (Рис.1(б)) видно, что амплитуда у Multisim ниже, чем у остальных симуляторов, однако никаких ошибок в построенной схеме или настройках симуляции обнаружено не было, ввиду чего мы можем сделать вывод что алгоритм расчета просто чуть хуже справился с задачей чем в других симуляторах. При $n=5$ (Рис.1(в)) можно наблюдать, что максимальная амплитуда всех симуляторов больше, чем при аппаратной реализации, в данном случае это не ошибка ни одного из симуляторов, просто возможности моделирования деталей ограничены, и чем точнее модели, тем сложнее симуляция. Однако даже самые точные модели являются избыточными потому как неидеальность реальных деталей даже в одной партии может разниться по параметрам на 10%.

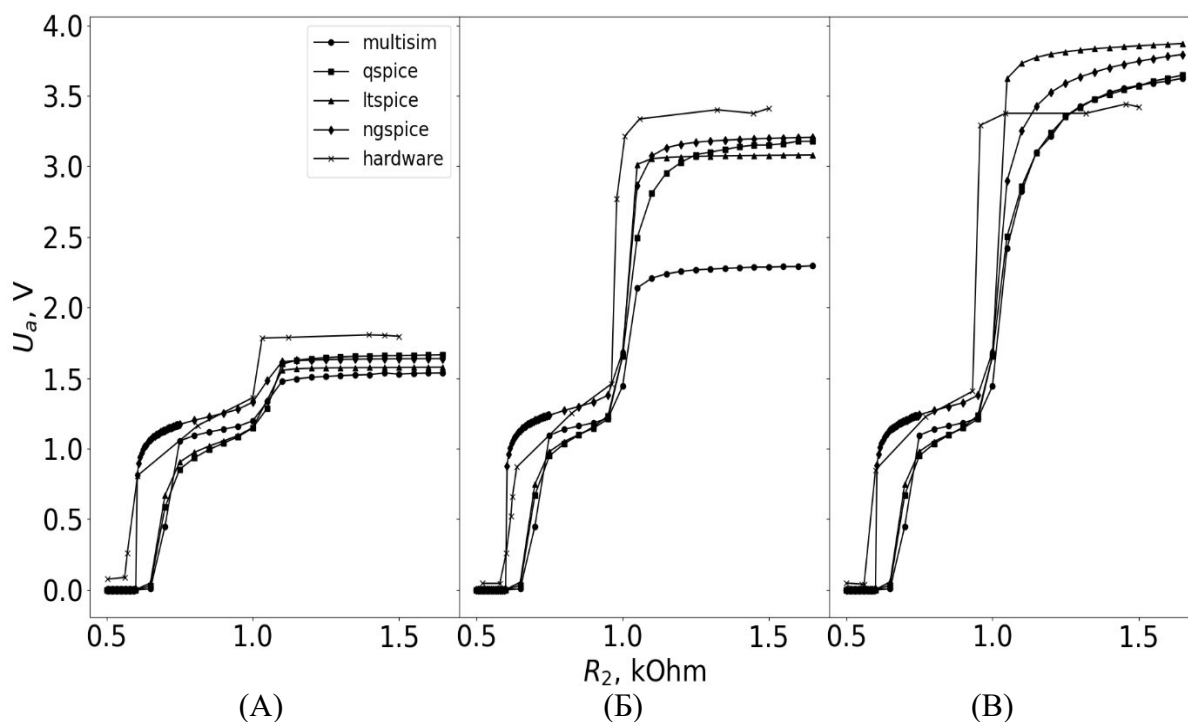


Рис.1. Зависимость амплитуды от сопротивления резистора R_2 при количестве диодов $n=1$ (а), $n=3$ (б), $n=5$ (в).

Заключение. Современные симуляторы аналоговых и цифровых схем демонстрируют схожие результаты при моделировании одной и той же схемы, что подтверждает корректность их расчетных алгоритмов. Однако различия в удобстве использования, доступности библиотек компонентов и возможностях импорта моделей играют ключевую роль при выборе инструмента. Например, QSPICE требует ручного импорта многих популярных компонентов, тогда как Multisim и LTspice обладают более обширными встроенными библиотеками.

Особое внимание следует уделить результатам, полученным в Ngspice. Его моделирование дало наибольшее отклонение амплитуды сигнала по сравнению с другими симуляторами, однако это связано с тем, что он наиболее точно приближен к аппаратной реализации схемы. Это может свидетельствовать о том, что другие симуляторы вводят некоторые упрощения или аппроксимации в расчетах.

Таким образом, выбор симулятора зависит не только от точности расчетов, но и от удобства работы, доступности необходимых моделей и функциональных возможностей, которые соответствуют требованиям конкретного исследования.

Работа выполнена в рамках гранта Программы «Мозг» АНО «Идея» грант № ASP-10-2022/II

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Mahowald, R. Douglas, A silicon neuron, *Nature* 354 (1991) 515–518.
2. C. Rasche, R. Douglas, An improved silicon neuron, *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 23 (2000) 227–236. doi:10.1023/A: 1008357931826.
3. A. van Schaik, Building blocks for electronic spiking neural networks, *Neural Networks* 14 (6) (2001) 617–628. doi:10.1016/S0893-6080(01) 450 00067-3.
4. S. Binczak, V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, J. M. Bilbault, Experimental study of bifurcations in modified FitzHugh-Nagumo cell, *Electronics Letters* 39 (13) (2003) 1.
5. F. Li, Q. Liu, H. Guo, Y. Zhao, J. Tang, J. Ma, Simulating the electric activity of fitzhugh-nagumo neuron by using josephson junction model, *Nonlinear Dynamics* 69 (4) (2012) 2169–2179. doi:10.1007/s11071-012-0417-z.
6. D. Kulminskiy, V. Ponomarenko, M. Prokhorov, A. Hramov, Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators, *Nonlinear Dynamics* 98 (1) (2019) 735–748. doi:10.1007/s11071-019-05224-x.
7. N. M. Egorov, I. V. Sysoev, V. I. Ponomarenko, M. V. Sysoeva, Complex regimes in electronic neuron-like oscillators with sigmoid coupling, *Chaos, Solitons & Fractals* 160 (2022) 112171. doi:10.1016/j.chaos. 465 2022.112171.
8. X. Hu, C. Liu, L. Liu, J. Ni, S. Li, An electronic implementation for morris– lecar neuron model, *Nonlinear Dynamics* 84 (2016) 2317–2332. doi:10. 1007/s11071-016-2647-y.
9. E. Farquhar, P. Hasler, A bio-physically inspired silicon neuron, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 52 (3) (2005) 477– 488. doi:10.1109/TCSI.2004.842871.
10. Q. Ma, M. R. Haider, V. L. Shrestha, Y. Massoud, Bursting hodgkin– huxley model-based ultra-low-power neuromimetic silicon neuron, *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 73 (2012) 329–337. doi:10. 475 1007/s10470-012-9888-6.
11. G. H. Rutherford, Z. D. Mobbille, J. Brandt-Trainer, R. Follmann, E. Rosa, Analog implementation of a hodgkin–huxley model neuron, *American Journal of Physics* 88 (11) (2020) 918–923. doi:10.1119/10.0001072.
12. V. V. Matrosov, M. A. Mishchenko, V. D. Shalfeev, Neuron-like dynamics of a phase-locked loop, *The European Physical Journal Special Topics* 222 (10) (2013) 2399–2405. doi:10.1140/epjst/e2013-02024-9. 485

Секция 1. Прикладные вопросы математики и математического моделирования

<i>Алексеев М.М., Денисенко Е.Д., Куготова А.А., Кулак А.С., Козловский А.В.</i> Идентификация личности по отпечаткам пальцев рук при помощи фрактальной геометрии.....	3
<i>Бакаев П.Е., Матвеев Н.А., Поляков П.А.</i> Применение двухточечных аппроксимаций Паде в решении краевых задач математической физики.....	6
<i>Бакшеев В.Е., Заяц О.И.</i> Исследование приоритетной системы обслуживания с детерминированным выталкивающим механизмом и однократной профилактикой канала обслуживания.....	9
<i>Гневашева В.А., Бортковская М.Р.</i> Дробное дифференцирование в моделировании вязкоупругого вещества.....	12
<i>Грачев Д.Р.</i> Расчёт фрактальной размерности одномерных сигналов оптокардиографии.....	16
<i>Грищенко А.А., Джафарова А.С., Сулейманова Е.М., Корнилов М.В.</i> Анализ связанности разных полушарий мозга у крыс-моделей эпилепсии.....	18
<i>Губарь И.О., Дорошенко В.М., Гвоздев Е.Ю., Гришин М.Н.</i> Моделирование полета летательного аппарата методом несущей.....	20
<i>Джафарова А.С., Грищенко А.А., Сулейманова Е.М., Корнилов М.В.</i> Вейвлет-анализ для классификации двух типов разрядов у крыс-моделей лимбической эпилепсии.....	22
<i>Долинина А.Ю.</i> Исследование структуры локальных потенциалов мозга у крыс-моделей в состоянии бодрствования.....	25
<i>Жорник С.А., Иксанова Р.Р., Тархов Д.А.</i> Математическое моделирование лавовых потоков с помощью физически информированных нейронных сетей и данных экспериментов.....	28
<i>Журавлева К.Д., Журавлева А.Д.</i> Вычисление сумм гипергеометрических рядов одного частного вида.....	32
<i>Капустников А.А., Сысоева М.В., Сысоев И.В.</i> Модель частотного преобразователя в таламокортикальной системе.....	34
<i>Матвеев Н.А., Бакаев П.Е., Поляков П.А.</i> Аппроксимации Паде в методах приближенных вычислений.....	36
<i>Никонова Е.А.</i> Приближение поля притяжения малого небесного тела гравитационным полем равномоментной ему системы материальных точек.....	39
<i>Палиенко А.А., Гайлит Е.В.</i> Анализ модели управления запасами с помощью динамического программирования.....	43
<i>Поляков П.А., Бакаев П.Е., Матвеев Н.А.</i> Применение одноточечных аппроксимаций Паде в решении начальных задач математической физики.....	45
<i>Сусоров М.А., Корнилов М.В., Сысоев И.В.</i> Использование пакета симуляции Brian для изучения математической модели основного ритма лимбической эпилепсии на основе нейронов Ходжкина-Хаксли.....	48
<i>Тарасов В.Д., Тархов Д.А., Шатров А.В.</i> Определение оптимального числа нейронов для расчёта распространения нефтяного пятна.....	51
<i>Усиков А.А., Лагунова М.В.</i> Аналитическая геометрия в алгоритме трассировки лучей	54
<i>Варенникова М.В., Баландюк А.В., Преображенский С.П.</i> Асимптотика решений ОДУ.....	57

Секция 2. Физика и науки о материалах

<i>Комиссаренко О.Г., Щепилов Е.А., Нарсеев А.С., Старостенков М.Д.</i> Механические характеристики металломатричного композита Ti_3Al-C_{60} : молекулярно-динамическое моделирование.....	60
<i>Куприянов Г.А., Ипатов А.Н.</i> Распределение электронной плотности в основном состоянии в коллоидных нанокристаллах CdSe, легированных по объёмному и поверхностному типу.....	64
<i>Рудоминский А.Е., Волков М.П., Чикуров Д.С.</i> Бесконтактные методы характеристики сверхпроводящих свойств ВТСП лент второго поколения.....	67
<i>Рыбаков Д.О., Величкин В.Е.</i> Исследование зависимости показателя преломления жидкостей от их плотности.....	70
<i>Сизов М.Н., Васильчикова Е.Н., Константинов М.С.</i> Исследование искусственной оптической анизотропии, обусловленной механическим воздействием, поляризационно-оптическим методом.....	73
<i>Суркова С.С., Немцев Г.А., Шмидт М.Р., Шульга П.Д., Подсвилов О.А., Соколова Д.А.</i> Исследование влияния температуры отжига на формирования наночастиц золота в силикатном стекле после электронного облучения.....	76
<i>Тонков Д.Н., Грозова Н.А., Кобышно И.А., Гасумянц В.Э.</i> Перколяционная проводимость в полимерных композитах на основе термопластичного полиуритана и одностенных углеродных нанотрубок.....	79
<i>Шитов А.Е., Михайлин Н.Ю., Шашиур Д.В., Волков М.П., Кумзеров Ю.А.</i> Термомагнитные эффекты в наноструктурированных сверхпроводниках.....	81
<i>Шмыр Д.С., Андреева Т.А., Быков Н.Ю., Захаров В.В., Лукин А.Я.</i> Модель нагрева и разрушения пористой среды.....	84
<i>Щепилов Е.А., Комиссаренко О.Г., Янковская У.И., Старостенков М.Д.</i> Исследование зависимости показателя преломления жидкостей от их плотности.....	87

Секция 3. Методика преподавания физико-математических дисциплин в вузе

<i>Дорошенко В.М.</i> Применение современных программных средств в изучении технических дисциплин.....	90
<i>Ефимова Г.В., Морозов А.А., Марченко А.М., Мизина В.В., Фараджеева М.П.</i> Использование моделей COMSOL Multiphysics в лабораторном практикуме по физике.....	92
<i>Кокшарова Е.И., Мизина В.В.</i> Формирование исследовательских компетенций студентов на лабораторном практикуме по физике.....	95
<i>Аньхой Ма, Пархоменко Е.Н.</i> Исследование преподавания физики в перевернутом классе на основе проблемного обучения.....	98
<i>Меньшиков А.А., Ермаков Л.К.</i> Из опыта проведения лабораторной работы 1.01 (моделирование случайной величины).....	102
<i>Руль Н.И., Веневцев И.Д., Тонков Д.Н., Таранец К.Б., Романов В.В.</i> Исследование распределения значения числа π , полученного при сравнительном анализе магнитной восприимчивости различных материалов, представленной в различных источниках....	103
<i>Смоликова А.Н., Кротов В.М.</i> О применении различных видов дидактических средств для развития функциональной естественнонаучной грамотности учащихся при изучении механических колебаний и волн.....	106

Содержание

<i>Стародуб И.М., Вязовой Д.В., Юрченко Д.И., Богданов М.А.</i> Развитие методик обучения физико-математических наук за счет цифровых технологий.....	109
<i>Ульманова А.Д., Иткин М.И., Леонова Н.А.</i> Мотивация студентов младших курсов к обучению в инженерном вузе глазами студентов.....	111
<i>Чиликина А.Э., Тёрушкин Б.С.</i> Студенческое самоуправление: роль, проблемы и перспективы.....	113
<i>Чуркина Е.Р., Малышева А.В.</i> Учебное пособие по тригонометрии.....	115

Секция 4. Фундаментальные вопросы в инженерных исследованиях

<i>Аптуков М.И., Кожевников В.А.</i> Анализ применения алгоритмов оптимизации для настройки температурного режима работы серверов VEGMAN.....	117
<i>Володарский В.С.</i> Математическое моделирование динамических нагрузок в якорно-швартовых устройствах: фундаментальные подходы и их применение.....	121
<i>Гвоздев Е.Ю., Дорошенко В.М., Гришин М.Н., Губарь И.О.</i> Создание и использование компьютерно-математического моделирования для воссоздания двигателей внутреннего сгорания.....	125
<i>Гришин М.Н., Губарь И.О., Гвоздев Е.Ю., Дорошенко В.М.</i> Метод статистических эквивалентов в задачах моделирования радиотехнических систем для космических приложений.....	127
<i>Егоров Н.М.</i> Синхронизация осцилляторов нейроноподобной активности в сложной иерархически устроенной сети как модель лимбической эпилепсии.....	130
<i>Лачинова Д.А.</i> Нарушение межполушарной функциональной связанности после фокального повреждения мозга и развития распространяющейся деполяризации.....	132
<i>Такашвили Л.В., Пономаренко В.И., Сысоев И.В.</i> Сравнительный анализ симуляторов электронных схем.....	134

МОЛОДЁЖНАЯ ПЕТЕРБУРГСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ИНЖЕНЕРОВ-ПЕДАГОГОВ

Сборник материалов научной конференции

22–23 апреля 2025 года

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 25.06.2025. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 8,75. Тираж 24. Заказ 1883.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного редакционной коллегией,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.